

# 改进的限定 Voronoi 图梯形检测带细分算法

李海生<sup>1</sup> 曾宇航<sup>1</sup> 蔡强<sup>1</sup> 刘曰武<sup>2</sup>

(北京工商大学计算机与信息工程学院 北京 100048)<sup>1</sup> (中国科学院力学研究所 北京 100190)<sup>2</sup>

**摘要** 针对已有的限定 Voronoi 图生成算法在一些复杂约束条件下不能收敛的问题,通过引入控制因子,给出一种改进的限定 Voronoi 图梯形检测带细分算法。在计算初始 Voronoi 生长元的过程中,引入外部和内部限定线段端点保护圆半径控制因子,控制限定线段两端点附近的 Voronoi 边的尺寸;在细分梯形检测带的过程中,引入外部和内部限定线段尺寸控制因子,控制位于限定线段上的 Voronoi 边的尺寸。实验结果表明,本算法对于内部边界约束、线束约束条件以及不规则区域均可以得到质量较好、满足约束条件的限定 Voronoi 图。

**关键词** 限定 Voronoi 图,梯形检测带,细分算法,控制因子,CGAL 算法库

中图分类号 TP391.41 文献标识码 A

## Improved Subdivision Algorithm of Trapezium Examining Strip for Constraint Voronoi Diagram Generation

LI Hai-sheng<sup>1</sup> ZENG Yu-hang<sup>1</sup> CAI Qiang<sup>1</sup> LIU Yue-wu<sup>2</sup>

(College of Computer and Information Engineering, Beijing Technology and Business University, Beijing 100048, China)<sup>1</sup>

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)<sup>2</sup>

**Abstract** Aiming at the problem that existing constraint Voronoi diagram generation algorithm may not converge when the constraints are complex, this paper proposed an improved subdivision algorithm of trapezium examining strip for constraint Voronoi diagram by introducing several control factors. External and internal constraint line endpoint protection radius control factors are used to control the size of the constraint line near the end points of the Voronoi edge during calculating the initial Voronoi growth process. External and internal constraint segment size control factors are used to control in the size of the constraint line on the Voronoi edge during the process of subdivision examining strip. Experimental results show the proposed algorithm can get satisfied results even in the complex domain including internal boundary constraints, pencil of lines constraints and irregular areas.

**Keywords** Constraint Voronoi diagram, Trapezium examining strip, Refinement algorithm, Control factor, Computational geometry algorithms library

## 1 引言

限定 Voronoi 图具有垂直平分的特性,它能够很好地模拟非规则边界,能够解决三角网格用于某些数值模拟计算时的不收敛问题;另外,网格的细化和粗化性质较好。因此限定 Voronoi 图在工程技术领域,尤其在油藏数值模拟、地下水探测、机器人路径规划、流体力学、考古学、生态学、城市规划、移动通信等领域中有很好的应用前景<sup>[1]</sup>。

Okabe 提出了二维限定 Voronoi 图生成方法,但其约束条件比较简单,只有外部边界和井点,没有考虑内部边界的情况<sup>[2]</sup>。Kappa 也提出了限定 Voronoi 图生成方法<sup>[3]</sup>,它假定内部边界(如断层)和外部边界是直线段,考虑了边界附近节点、角点和竖直井周围节点的相互干扰。但该文在处理相互

干扰时提出近 10 种情况分别处理,算法比较繁琐。文献[4, 5]提出生成限定 Voronoi 图的控制圆算法,该算法简单,实现方便。但是,在进行网格的尺寸与质量控制时,往往需要加入新的生长元。如果需要加入的新生长元恰好位于控制圆内,由于控制圆的大小无法改变,只能舍弃该生长元;在线段夹角较小的区域,生成的 Voronoi 网格单元的质量难以令人满意,且算法过程有些复杂。文献[6, 7]提出了 Voronoi 细化算法生成二维限定 Voronoi 图,该算法在复杂限定条件下自适应性不好,限定线段间的夹角较小的情况下,矩形检测带的两条边界靠近限定线段,检测带的细分操作会产生大量畸形限定 Voronoi 图网格单元,网格单元的生长点非常接近 Voronoi 多边形的某条边。蔡强等于 2009 年提出的 Voronoi 梯形检测带细分算法<sup>[8]</sup>可以在复杂限定条件下收敛,但该算法对于一

到稿日期:2012-05-03 返修日期:2012-09-18 本文受国家科技重大专项课题(2011ZX05038-003),北京市自然科学基金(4112016),北京市属高等学校人才强教深化计划专项课题(PHR201008239),北京市属高等学校科学技术与研究生教育创新工程建设项目(PXM2012\_014213\_000037)资助。

李海生(1974—),男,博士,教授,CCF 会员,主要研究方向为计算机图形学、科学计算可视化, E-mail: lihsh@th. btbu. edu. cn; 曾宇航 硕士生; 蔡强 博士,教授; 刘曰武 博士,研究员。

些极端情况例如线束约束条件的处理还有待于进一步完善,另外,该算法后期需要做大量的尺寸与质量控制工作,尤其是在限定条件附近的处理比较繁琐。

针对传统的限定 Voronoi 图算法存在的问题,对二维 Voronoi 梯形检测带细分算法进行了改进,通过引入几个控制因子,使生成的限定 Voronoi 图网格单元具有较好的质量,能满足数值计算的需要。另外,由于梯形的几何特性,检测带两条边界向限定线段的两侧伸张,增大了检测带的外接圆半径。在生成网格过程中,梯形检测带可以减少无限制条件区域的生长元数目,加快算法收敛速度。

## 2 基本概念

### 2.1 限定条件规范化

二维限定 Voronoi 图中的限定条件是空间中任意限定点和限定线段组成的集合,称为限定条件集。为了方便,将限定条件集记为:CCS(Constraint Condition Set),表示为: $CCS = \{C_i\}, i=1, 2, \dots, n$ 。其中  $C_i$  表示限定条件集中的某个限定条件,在二维限定 Voronoi 图中,  $C_i$  可以是限定点,也可以是限定线段。

将 CCS 中限定点组成的集合称为限定点集,记为:CPS(Constraint Point Set),表示为  $CPS = \{CP_i\}, i=1, 2, \dots, m_1$ 。

将 CSS 中限定线段组成的集合称为限定线段集,记为:CSS(Constraint Segment Set),表示为: $CSS = \{CS_i\}, i=1, 2, \dots, m_2$ 。限定条件集是限定点集和限定线段集的并集:

$$CCS = CPS \cup CSS$$

本文希望对任意限定条件进行 Voronoi 剖分,但如果其中出现重点、叠合的线段和相交的线段,会给剖分算法带来不必要的麻烦。因此,应预先进行处理,使限定条件中无重合的点、无叠合的线段、无相交的线段并且线段的顶点都在限定点集中存在,称这个处理过程为规范化过程。

#### 算法 1 限定条件集合规范化算法

输入:任意的限定条件集合  $CCS = CPS \cup CSS$ 。

输出:规范的限定条件集合  $CCS = CPS \cup CSS$ 。

步骤:

(1)  $\forall CS \in CSS$ , 将 CS 的两个顶点加入 CPS 中。

(2)  $\forall CS_1, CS_2 \in CSS, CS_1 \neq CS_2$ :

如果  $CS_1, CS_2$  共线,且有公共点,用  $CS = CS_1 \cup CS_2$  取代  $CS_1$  和  $CS_2$  放入 CSS 中。如果  $CS_1, CS_2$  不共线,且相交于点 P,将点 P 加入 CPS 中。

(3)  $\forall CP \in CPS; \forall CP_1 \in CPS, CP_1 \neq CP$ , 如果 CP 和  $CP_1$  距离为 0,将  $CP_1$  从 CPS 中删除。如果 CP 在  $CS(CS \in CSS)$  内部,用 CP 将 CS 细分。

结束。

### 2.2 细分梯形检测带

如图 1 所示,以限定线段 AB 为例,分别在端点 A, B 以一定半径构造其保护圆,及初始生长元  $P_1P_2$  和  $P_3P_4$ 。 $P_1P_2P_4P_3$  构成一个等腰梯形检测带,  $P'P''$  为梯形的中位线,点 O 为梯形外接圆圆心。如果以 O 为圆心,半径为  $|OP_1|$  的圆 O 内部不包含其它的生长点, AO, OB 一定是限定 Voronoi 图的两条 Voronoi 边<sup>[9]</sup>。圆 O 内部包含其它的生长点,则将

$P', P''$  加入到生长元集合 SV 中。这时线段 AB 逻辑上可分为 3 个子线段:  $AO_1, O_1O_2, O_2B$  ( $O_1$  是等腰梯形  $P_1P'P''P_3$  的外接圆圆心,  $O_2$  是等腰梯形  $P_1P'P''P_3$  的外接圆圆心)。重复以上空圆检测和必要时相应的增加生长点操作,直到所有被检测的圆都为空(即圆内部不包含任何生长点)。

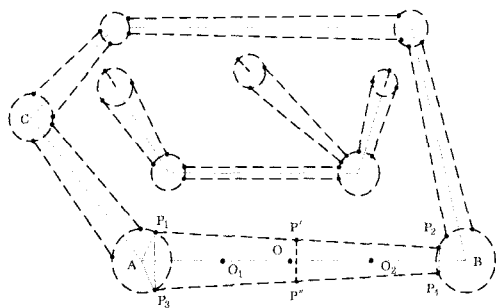


图 1 细分梯形检测带

## 3 算法的描述与分析

本文研究如何生成二维限定 Voronoi 图,即给定 PSLG (Planar Straight Line Graph) A 表示的平面区域<sup>[10]</sup>,如何生成其限定 Voronoi 图。PSLG A 经过 2.1 节的规范化算法后,进一步表示为一个点集合 PS(Point Set)和线段集合 SS(Segment Set)的并,即  $A = PS \cup SS$ ; 线段集合 SS 再进一步表示为外部线段集合 OSS(外边界线段集合)和内部线段集合(内边界线段和独立线段的集合) ISS,即  $SS = OSS \cup ISS$ 。对于一类多边界多边形,其有一个最外面的边界,称为外边界,其他边界称之为内边界<sup>[11]</sup>。

定义 1 设 S 和 T 都是闭点集,则 S 和 T 的最小距离  $dis(S, T) = \min\{dis(p, q) | \forall p \in S, \forall q \in T\}$ 。

定义 2 给定 PSLG  $A = PS \cup SS$ , 平面上任意一点 p 的局部特征尺寸  $lfs(p)$  指与 PSLG A 中的任意两个不邻接单元都相交的最小圆的半径,显然  $lfs(p) > 0$ 。如图 2 所示,图中的圆的大小代表了剖分域中的不同点的局部特征尺寸。

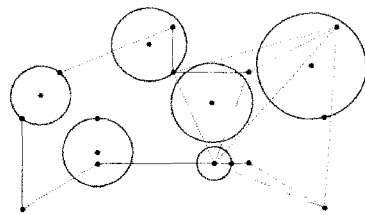


图 2 局部特征尺寸

定义 3 给定 PSLG  $A = PS \cup SS, \forall s \in SS, d_{\min}(s) = \min\{dis(s, t) | t \in A, t \text{ 与 } s \text{ 无公共点}\}$ 。显然  $d_{\min}(s) > 0$ 。

#### 算法 2 算法的主过程

输入:PSLG A ( $A = PS \cup SS, SS = OSS \cup ISS$ ) 和均匀布点数目 un。

输出:满足 PSLG A 约束的限定 Voronoi 图。

步骤:

Step1 计算均匀网格尺寸 us。外边界面积为 obs,则  $us = obs/un$ 。

Step2 以 A 和 us 为参数,调用算法 3 计算初始生长点,得到一个初始化的梯形检测带集合 XSS 和一个初始化好的生长元集合 SV。

Step3 以 XSS 和 SV 为参数,调用算法 4 进行检测带细分。

Step4 在井眼影响范围区域内,放射状布点,将布好的点加入到生长元集合 SV 中。

Step5 调用 Delaunay 三角化算法由生长点集 SV 构造 D(SV),由 D(SV)对偶得到 CVD(SV)。

### 算法 3 计算初始生长点(子过程)

输入:PSLGA(A=PSUSS,SS=OSSUISS)和均匀网格尺寸 us。

输出:一个初始化好的梯形检测带集合 XSS 和一个初始化好的生长元集合 SV。

步骤:

Step1  $\forall s \in SS$ , 计算  $d_{\min}(s)$ 。

Step2  $\forall s \in SS$ , 设其端点为 AB。对点 A, 计算  $lfs(A)$  及 A 点的保护圆半径  $r_A$ ; 如果  $s \in OSS$ ,  $r_A = \min\{\theta * lfs(A), \alpha * us\}$  ( $0 < \theta \leq 1/2$ ,  $0 < \alpha$ , 取  $\theta = 0.3$ ,  $\alpha = 1.0$ ); 如果  $s \in ISS$ , 则  $r_A = \min\{\theta * lfs(A), \beta * us\}$  ( $0 < \theta \leq 1/2$ ,  $0 < \beta$ , 取  $\theta = 0.3$ ,  $\beta = 0.7$ )。  $\alpha$  为外部限定线段端点保护圆半径控制因子,  $\beta$  为内部限定线段端点保护圆半径控制因子。同理计算  $lfs(B)$  及  $r_B$ 。

Step3  $\forall s \in SS$ , 设其端点为 AB。找到 SS 中所有除 s 外以 A 为端点的线段, 记为  $R_S(A)$ 。若  $R_S(A)$  为空, 记 s 的反向延长线与 A 点的保护圆交点为 P, 将 P 加入 SV 中。否则, 计算 s 与  $R_S(A)$  中线段所成的最小角  $\alpha_{A_{\min}}$ 。同理计算  $\alpha_{B_{\min}}$ 。

Step4 计算  $r_1 = 2 * r_A(s) = 2 * \min\{r_A * \sin(\alpha_{A_{\min}}/3), d_{\min}(s)/3\}$ ,  $r_2 = 2 * r_B(s) = 2 * \min\{r_B * \sin(\alpha_{B_{\min}}/3), d_{\min}(s)/3\}$ 。  $r_1, r_2$  为等腰梯形的两条底边的长。设这两条底边分别与 A、B 的保护圆交于  $P_1P_2$  和  $P_3P_4$ , 将这 4 个点加入 SV 中。

### 算法 4 细分梯形检测带(子过程)

输入:梯形检测带集合 XSS、生长元集合 SV 和均匀网格尺寸 us。

输出:经过细分后的梯形检测带集合 XSS 和生长元集合 SV。

步骤:

Step1 定义 n, 令  $n=0$ 。

Step2  $\forall xs \in XSS$ , 记 xs 对应的限定线段为 s, xs 的外接圆为 C。若 xs 为 s 的初始梯形检测带, 记 s 的两端点保护圆分别为  $C_1$  和  $C_2$ ; 否则, 记 xs 两端的梯形检测带的外接圆分别为  $C_1$  和  $C_2$ 。记 C 的圆心与  $C_1, C_2$  的圆心的距离分别为  $d_1$  和  $d_2$ 。当  $s \in OSS$ , 如果  $\min\{d_1, d_2\} > \gamma * us$  ( $0 < \gamma$ , 取  $\gamma = 1.6$ ), 执行一次 Step4; 否则, 检查 C 是否包含 SV 中的任何点, 如果包含, 执行一次 Step4。当  $s \in ISS$ , 如果  $\min\{d_1, d_2\} > \delta * us$  ( $0 < \delta$ , 取  $\delta = 1.0$ ), 执行一次 Step4; 否则, 检查 C 是否包含 SV 中的任何点, 如果包含, 执行一次 Step4。

Step3 如果  $n > 0$ , 返回到 Step1 重新开始执行; 否则, 算法结束。

Step4 用梯形的中位线细分检测带 xs 为  $xs_1, xs_2$ , 并将其加入到 XSS 中, 将 xs 从 XSS 中删除。记中位线与 xs 的交点对为  $P'P''$ , 将  $P'P''$  加入 SV 中。  $n=n+1$ 。返回继续执行 Step2。

由定义 2 中的局部特征尺寸定义和算法 3 可知, 当  $0 < \theta \leq 1/2$  时, 保护圆半径最大不超过局部特征尺寸的一半, 不会发生保护圆相交的情况, 可保证整个算法收敛。外部和内部限定线段端点保护圆半径控制因子  $\alpha = 1.0, \beta = 1.0$ , 且外部和内部限定线段尺寸控制因子  $\gamma = 1.0, \delta = 1.0$  时, 本文算法就退化为梯形检测带算法。通过对外部与内部限定端点保护圆因子值的改变来控制外边界区域附近的 Voronoi 单元的疏密程度, 对外部和内部限定线段尺寸控制因子值的改变来控制外边界区域附近的 Voronoi 单元的疏密程度。这样通过对 4 个控制因子值的改变, 来提高整个算法的柔性, 简化生成

Voronoi 网格的尺寸和质量控制工作。

算法 3 计算  $lfs(P)$  和  $d_{\min}(s)$  时, 对于每个限定条件, 使用变量记录已经计算过的最小距离, 因此其时间复杂度为  $O(N_1^2)/2(N_1$  为 PSLG A 中限定条件的数量)。算法 4 细分检测带, 每次检查检测带外接圆采用可见行走算法<sup>[12]</sup>快速定位。Step4 的布点操作的时间复杂度与设定的井点影响半径等分数、辐射线数目等相关, 对算法时间效率影响不大。设最终生长点的数量为 N, Step5 可以使用空洞算法生成 Delaunay 三角网格, 其时间复杂度为  $O(N \log N)$ ; 对偶生成限定 Voronoi 图, 每生成一个限定 Voronoi 图网格单元调用一次可见行走算法进行生长点的快速定位, 然后直接生成限定 Voronoi 图网格单元。输入的 PSLG 的数量  $N_1$  远小于生成的限定 Voronoi 图生长点的数量 N, 因此算法的主要计算量在于算法 Step5, 即  $O(N \log N)$ 。

根据上述分析, 整个算法的时间复杂性为  $O(N \log N)$ 。

## 4 实验结果与分析

本文基于 CGAL 算法库, 实现改进的 Voronoi 梯形检测带细分算法。为了验证本文算法的正确性和有效性, 分别用图 3 和图 5 中的限定条件对改进的 Voronoi 梯形检测带细分算法进行了实验。实验环境为 CPU Core2 Duo T5670 1.8GHz、内存 2G、显存 256M, 操作系统为 Windows 7 Ultimate, 采用 C++ 语言编程。

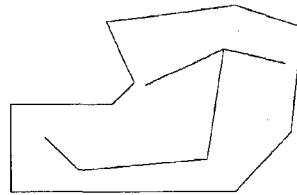


图 3 限定条件(PSLGA)

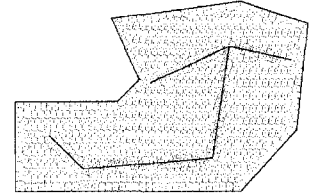


图 4 采用本文算法生成的限定 Voronoi 图

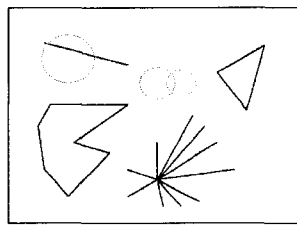


图 5 限定条件(PSLGB)

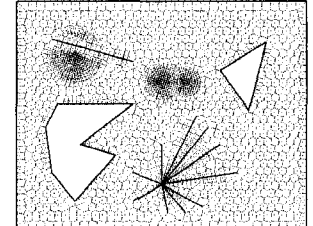


图 6 采用本文算法生成的限定 Voronoi 图

梯形检测带算法实例 1 的初始限定条件 PSLG A 如图 3 所示, 限定条件包括限定线, 限定线之间有交叉现象。取  $\alpha = 1.0, \beta = 0.7, \gamma = 1.6, \delta = 1.0$ , 应用本文算法计算得到的限定 Voronoi 图如图 4 所示, 网格单元数量为 1006, 生成图示限定 Voronoi 图所用的时间为 1891ms。梯形检测带算法实例 2 的初始限定条件 PSLG B 如图 5 所示, 限定条件包括限定线(即井点, 图中圆的大小表示井点影响的半径)、限定线(外部边界和内部断层线)。限定条件之间有相互影响: 限定线有交叉现象, 井点的影响范围内可能有限定线。取  $\alpha = 1.0, \beta = 0.7, \gamma = 1.6,$

(下转封三)

最大的那个模型类别为识别结果。在“多类分类”实验中,训练一个具有 10 个隐藏状态的 HCRF 模型;识别测试时,选择概率最大的模型类别为识别结果。

表 2 对比了在给定数据库上,利用不同算法模型进行行为识别的实验结果。由表 2 可以看出:(1) CRF 模型和 HCRF 模型的识别率要高于 HMM 模型。这在一定程度上也验证了对有限动作集合进行行为识别时,判别式模型要优于产生式模型。(2) 加入长相关约束(即窗口大小  $\omega$  取不同的值)有助于提高算法的识别率,随着窗口大小  $\omega$  的增加,识别率也在增加。(3) “多类分类”模式训练的 HCRF 模型的识别效果要优于“一对多”模式训练的 HCRF 模型。

表 2 不同模型的行为识别率对比

模型	识别率
HMM	83.5
CRF( $\omega=0$ )	86.7
CRF( $\omega=1$ )	89.9
HCRF(multiclass, $\omega=0$ )	93.5
HCRF(multiclass, $\omega=1$ )	95.4
HCRF(multiclass, $\omega=2$ )	96.8
HCRF(one-vs.-all, $\omega=0$ )	91.4

**结束语** 本文将人体行为的侧影轮廓特征作为出发点,提出了一种新的行为识别方法;使用了一种基于距离组的轮廓描述方法,提高了星型骨架方法对轮廓局部特征的描述能力;使用隐条件随机场对行为进行建模和识别,结果表明,对于有限动作集合进行动作识别时,判别式模型要优于产生式模型。本算法的不足之处在于要求能比较精确地提取轮廓;此外,还需要在如何合理选择和建立模型方面展开更加深入的研究。

## 参考文献

[1] 王亮,胡卫明,谭铁牛.人运动的视觉分析综述[J].计算机学报,2002,25(3):225-237

(上接第 303 页)

$\delta=1.0$ ,应用本文算法计算得到限定 Voronoi 图,如图 6 所示,网格单元数量为 1694,生成图示限定 Voronoi 图所用的时间为 3946ms。实验的结果证明了本文给出的限定 Voronoi 图生成算法对于内部边界约束、线束约束条件以及不规则区域均可以得到质量较好的满足约束条件的限定 Voronoi 图。

**结束语** 本文针对已有限定 Voronoi 图算法的不足,给出了改进的梯形检测带细分算法生成二维 Voronoi 网格。主要是引入了几个控制因子,简化了限定条件附近的处理,保证了算法对于复杂约束条件下的收敛,同时提高了整个算法的柔性,使生成的限定 Voronoi 图网格单元具有较好的质量,能满足煤层气数值模拟等计算的需要。下一步工作考虑在本文算法的基础上,研究三维限定条件下限定 Voronoi 图的生成算法,并对生成的三维限定 Voronoi 图进行质量与尺寸控制。

## 参考文献

[1] 马立玲,张有会.分区加权 Voronoi 图的性质及其面积计算[J].计算机科学,2011,38(2):195-198  
 [2] Okabe A,Boots B,Sugihara K. et al. Spatial tessellations: concepts and applications of Voronoi diagram (2nd edition) [M]. UK:John Wiley & Sons,Ltd. 2000;242-245

[2] 杜友田,陈峰,徐文立,等.基于视觉的人的运动识别述[J].电子学报,2007,35(1):84-90  
 [3] 谷军霞,丁晓青,王生进.行为分析算法综述[J].中国图像图形学报,2009,14(3):377-387  
 [4] Chen H-S,Chen H-T,Chen Y-W, et al. Human action recognition using star skeleton[C]//Proc of the 4th ACM international workshop on Video surveillance and sensor networks. New York:ACM Press,2006;171-178  
 [5] 王斌,舒华忠,施朝建,等.一种基于轮廓线的形状描述与匹配方法[J].电子与信息学报,2008,30(4):949-952  
 [6] Quattoni A,Wang S,Morency LP, et al. Hidden conditional random fields [J]. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence,2007,29(10):1848-1852  
 [7] Lafferty J,McCallum A,Pereira F. A conditional random fields; Probabilistic models for segmenting and labeling sequence data [C]//Proc of the Annual International Conference on Machine Learning. San Francisco, USA, 2001;282-289  
 [8] Sminchisescu C,Kanaujia A, Li Z, et al. Conditional models for contextual human motion recognition [J]. Journal of Computer Vision and Image Understanding,2006,104(2/3):1808-1815  
 [9] Wang S B, Quattoni A, Morency L P, et al. Hidden conditional random fields for gesture recognition[C]// Proc of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. New York, IEEE Computer Society, 2006;1521-1527  
 [10] 侯叶,郭宝龙.基于图切割的人体运动检测[J].光电子·激光,2007,18(6):725-728  
 [11] 褚一平,陈勤,黄叶珏,等.基于判别模型的视频前景/阴影自动分割算法[J].模式识别与人工智能,2008,21(6):849-855  
 [12] 王亮,胡卫明,谭铁牛.基于步态的身份识别[J].计算机学报,2003,26(3):353-360  
 [13] Gorelick L,Blank M,Shechtman E, et al. Action as space-time shapes [J]. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence,2007,29(12):2247-2253

[3] KAPPA Engineering. E06-Voronoi numerical module [EB/OL]. Technicalreference,http://www.egr.uh.edu/courses/Engi 6314/TechnicalReferences/TR6Advanced Interpretation. PDF  
 [4] 蔡强,杨钦,孟宪海,等.二维 PEVI 网格生成的研究[J].工程图学学报,2005,26(2):69-72  
 [5] 杨权一,蔡强,李吉刚.二维限定 PEVI 网格生成技术的研究[J].计算机工程与应用,2004,22(7):80-83  
 [6] 李吉刚,孟宪海,杨钦,等.二维约束 Voronoi 网格构造及其尺寸、质量控制[J].计算机辅助设计与图形学学报,2005,17(9):1950-1956  
 [7] Verma S. A flexible gridding scheme for reservoir simulation [Z]. Presented at SPE Intl, Student Paper Contest, 1995; 657-672  
 [8] 蔡强,王长飞,李海生,等.二维复杂域 PEVI 网格细化生成算法[J].东南大学学报,2009,10(4):343-347  
 [9] 蔡强.限定 Voronoi 网格剖分的理论及应用研究[M].北京:北京邮电大学出版社,2010  
 [10] 汪嘉业,王文平,屠长河,等.计算几何及应用[M].北京:科学出版社,2011  
 [11] 杨承磊,汪嘉业,孟祥旭.多边形外部 Voronoi 图顶点和边数的上界[J].计算机辅助设计与图形学学报,2005,17(4):689-693  
 [12] A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation [J]. Journal of Algorithms, 1995,18(3):548-585