

# CP-nets 的定性偏好决策及一致性推理

孙雪姣 刘惊雷

(烟台大学计算机学院 烟台 264005)

**摘要** CP-nets 是一种简单而又直观的图形化偏好表示工具,特别适合描述不完全信息下的具有依赖关系的多属性定性偏好决策。首先通过构造 CP-nets 导出图及对其性质的研究,得出强占优测试本质上是导出图上顶点之间的可达性问题,从而利用图的深度优先遍历算法实现了二值网的强占优测试;然后分别从无环图、有环图的角度给出 CP-nets 一致性的相关定理和性质,提出了判断一致性的 3 种方法,使得 CP-nets 的一致性问题的解决;强化和扩充了 Boutilier 所提出的一些概念,深化了 CP-nets 的基础理论研究。

**关键词** 条件偏好网(CP-nets),条件偏好表(CPT),定性偏好决策,强占优测试,偏好的一致性

**中图分类号** TP301 **文献标识码** A

## Qualitative Preference Decision and Reasoning of Consistency for CP-nets

SUN Xue-jiao LIU Jing-lei

(School of Computer, Yantai University, Yantai 264005, China)

**Abstract** CP-nets (condition preference networks) is a simple and intuitive graphical tool for representing conditional ceteris paribus (all other things being equal) preference statements over the values of a set of variables, and it suits multiple attributes qualitative decision making under incomplete preference information situation especially. Firstly, by constructing induced graph of CP-nets and studying its properties, it was found that the nature of strong dominance testing is accessibility between vertices on the induced graph. So the problem of strong dominance testing with respect to binary-valued CP-nets is solved by DFS algorithm. Secondly, the consistency for CP-nets was studied. The theorems and properties on consistency were given separately from the perspective of acyclic CP-nets and cyclic CP-nets. In particular, three methods on judgment of consistency were proposed. All these can be seen as the improvement and refinement of Boutilier's related works.

**Keywords** Condition preference networks(CP-nets), Condition preference table(CPT), Qualitative preference decision, Strong dominance testing, Preferences consistency

在人工智能领域,提出了用一个效用函数来描述用户的偏好,它是一个非常强大的定量知识表示方法。但是,在面对自动化决策问题时,这个工具就显得无力了。另外,在许多领域,我们更希望用定性的方式来描述偏好信息。CP-nets (condition preference networks)能够用于描述相对严密的、直观的、结构化的条件偏好信息中隐含的定性偏好关系,就是对用户的偏好进行分析,从而找到最优的服务集合。运用这个工具的主要优势在于它是一个定性的图形化的描述工具,能够反映偏好之间的依赖关系,在许多实际环境中它的描述显得更加严密和自然。

目前偏好的应用大多都是基于 CP-nets 来加以描述<sup>[1-9]</sup>,其中典型的是文献[1,3]的工作,他们对前人工作进行了总结,详细描述了 CP-nets 的语法、语义及应用。近几年还出现了一些 CP-nets 子类的研究问题——TCP-nets (tradeoff-enhanced CP-nets)<sup>[4]</sup> 和 CI-net (condition important networks)<sup>[5]</sup>。其主要是在处理属性之间的偏好关系基础上,增加了反映属性重要性的元素,然而它们的分析技术和 CP-nets

一样。作为一种表示定性偏好的模型,其必定需要完成一些推理任务,比如强占优测试、可满足性、一致性、连通性及有界性等,这些都是 CP-nets 进行定性偏好决策的关键内容,却很少有人研究,大量的基础理论问题还没有解决。因此,CP-nets 目前并不能很好地与应用相结合,没有在实际生产系统中发挥出作用。

本文描述了 CP-nets 的模型及基本性质;致力于解决 CP-nets 的强占优测试和一致性,它们都是衡量 CP-nets 表达能力的重要因素。强占优测试是 CP-nets 上的重要运算,是实现定性偏好决策的根本,即不同配置之间的可比较问题,谁比谁优。然而对于复杂结构的 CP-nets 上的强占优测试要么没有<sup>[1]</sup>,要么复杂<sup>[3]</sup>,如何设计一种通用的算法来解决任何结构 CP-nets 的强占优测试?一致性是 CP-nets 实现偏好决策的关键内容,即 CP-nets 所表示的偏好有没有自相矛盾的地方,即 A 比 B 好,而 B 又比 A 好,这样的偏好关系会给决策者造成误导。如何判断一个 CP-nets 的一致性?目前也无人对此进行研究。本文介绍了它们的相关定理及实现方法。

到稿日期:2012-04-17 返修日期:2012-07-27 本文受国家自然科学基金项目(61170224),山东省教育厅项目(J11LG35)资助。

孙雪姣(1979—),女,硕士,讲师,主要研究方向为网络搜索技术、约束满足问题求解,E-mail:sunxuejiao6@tom.com;刘惊雷(1970—),男,硕士,副教授,主要研究方向为程序理论和计算方法。

本文有 2 个创新点：(1) 基于 CP-nets 导出图的研究，指出 CP-nets 上强占优关系的判断本质上是 CP-nets 导出图上任意两个顶点之间的可达性的判断，从而借助于图的深度优先遍历算法解决任意结构二值 CP-nets 上的强占优测试问题；(2) 分别从无环图、有环图、导出图的角度研究 CP-nets 一致性的相关性质，给出了判断一致性的 3 种不同方法，使得 CP-nets 的一致性问题的解决。

## 1 知识准备

### 1.1 CP-nets 的偏好模型

**定义 1**<sup>[6]</sup> 设  $V = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  是决策属性的集合， $Dom(X_i)$  代表属性  $X_i \in V$  的有限定义域  $\{x_{i1}, \dots, x_{in}\}$ ，则决策空间  $\Omega$  是各个属性定义域的笛卡儿积，即  $\Omega = Dom(X_1) \times \dots \times Dom(X_n)$  表示所有属性的可能组合。 $o \in \Omega$  是决策空间的一个配置 (outcome)，代表决策属性的一种组合。若两个配置  $o$  和  $o'$  仅有一个属性值不同，而其它属性值都相同，则称  $o$  和  $o'$  为可交换的配置 (swap outcome)。

现实中决策的两个属性之间若有依赖关系，即决策者对属性  $X_i$  的偏好取决于  $X_j$ ，则称  $X_j$  是  $X_i$  的父亲，用  $Pa(X_i)$  来表示。

**定义 2**  $>$  是决策空间  $\Omega$  上的二元关系，

(1) 若  $>$  自反 ( $(\forall o) o \in \Omega \rightarrow o > o$ )、反对称 ( $(\forall o, o') (o, o' \in \Omega \wedge o > o' \wedge o' \neq o \rightarrow o' \not> o)$ ) 和传递 ( $(\forall o, o', o'') (o, o', o'' \in \Omega \wedge o > o' \wedge o' > o'' \rightarrow o > o'')$ )，即  $>$  是严格偏序关系时，称  $>$  为  $\Omega$  上的严格偏好关系。

它反映了决策者对两个配置  $o, o'$  的偏好关系。即  $o > o'$  表示决策者对  $o$  的偏好强于对  $o'$  的偏好。

(2) 若对两个配置  $o, o' \in \Omega$ ，有  $o \not> o'$  且  $o' \not> o$ ，则称  $o$  和  $o'$  不可比。

(3) 若对两个配置  $o, o' \in \Omega$ ，有  $o > o'$  或  $o'$  与  $o$  不可比，则含义是  $o'$  不比  $o$  强，表示为  $o >_N o'$ 。即  $>_N$  为 CP-nets 所能表达的偏好集合。

**定义 3**<sup>[6]</sup>  $CPT(X_i)$  为属性  $X_i$  的条件偏好表 (condition preference table)，它表示属性  $X_i$  在  $Pa(X_i)$  的不同取值下，决策者对  $Dom(X_i)$  集合的一个偏好排序。即在  $Pa(X_i)$  的不同取值下，对属性  $X_i$  的所有取值的偏好排序也不一样。由决策者所提供的  $Pa(X_i)$  的一种取值称为属性  $X_i$  的一个决定条件。那么，在所有的决定条件下，决策者对属性  $X_i$  的取值的偏好排序构成了属性  $X_i$  的条件偏好表  $CPT(X_i)$ 。

**定义 4**<sup>[6]</sup> CP-nets 是一个有向图  $N = \langle V, CE \rangle$ ，其中  $V$  是顶点集，每一个顶点  $X_i$  都有一个条件偏好表  $CPT(X_i)$  与其关联。 $CE$  为有向边集，代表属性顶点之间的依赖关系。即一条有向边起点的取值影响着终点取值的偏好。若  $N$  中无环路存在，称之为无环 CP-nets (Acyclic CP-nets)，否则称之为有环 CP-nets (Cyclic CP-nets)。

**例 1** “我的计算机配置”实例。我要买一台电脑，主要考虑品牌 (Brand)、类型 (Type) 和 CPU，分别用  $B, T$  和  $C$  表示。首先考虑品牌，我对 IBM ( $B_i$ ) 的喜欢胜过 DELL ( $B_d$ )。而选择什么类型取决于品牌的选择，如果选了 IBM 品牌，我偏好笔记本电脑 ( $T_i$ )，而不是台式机 ( $T_d$ )，若选择了 Dell 品牌，则我对台式机的偏好更强些。对电脑类型的选择又影响了我对 CPU 的偏好。对于笔记本，我更喜欢 AMD 处理器

( $C_a$ )，而不是 Intel 处理器 ( $C_i$ )。反之，若选择了台式机，我对 Intel 处理器的偏好更强些。

图 1 为对应的 CP-nets 图  $N = \langle V, CE \rangle$ 。其中  $V = \{B, T, C\}$ ， $Dom(B) = \{B_i, B_d\}$ ， $Dom(T) = \{T_i, T_d\}$ ， $Dom(C) = \{C_a, C_i\}$ ； $CE = \{\langle B, T \rangle, \langle T, C \rangle\}$ 。

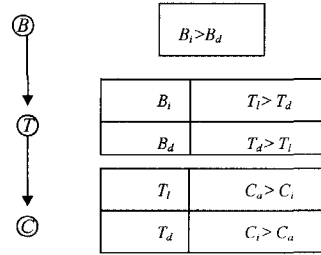


图 1 “我的计算机配置”的 CP-nets

### 1.2 CP-nets 导出图

**定义 5**<sup>[6]</sup> 设  $N = \langle V, CE \rangle$  是一个 CP-nets，则有向图  $G = \langle \Omega, IE \rangle$  是  $N$  的导出图，其中  $\Omega$  是顶点集合 (如定义 1 所示)， $IE$  是可交换的配置所构成的有向边集。每一条有向边记为： $\langle o_i, o_j \rangle$ ，表示由顶点  $o_i$  指向  $o_j$ ，满足： $o_j > o_i$ 。

对于  $o, o' \in \Omega$ ，若从顶点  $o'$  到  $o$  可达，即存在着一条有向路径连接顶点  $o'$  和  $o$ 。根据“ $>$ ”的传递性，满足： $o > o'$ 。

对于  $o, o' \in \Omega$ ，若从顶点  $o'$  到  $o$  不可达，从顶点  $o$  到  $o'$  也不可达，则称  $o$  与  $o'$  不可比较。例如图 2 中“ $B_i T_d C_a$ ”和“ $B_d T_d C_i$ ”就是一对不可比较的配置。

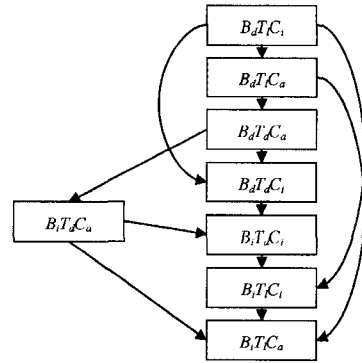


图 2 CP-nets 导出图

**定理 1**<sup>[6]</sup>  $G = \langle \Omega, IE \rangle$  是二值无环 CP-nets 图  $N$  的导出图，在  $N$  中  $|V| = n$ ， $|Dom(X_i)| = 2$ ，则  $|\Omega| = 2^n$ ， $|IE| = n \times 2^{n-1}$ ，即  $G$  中顶点个数是  $2^n$ ，边的条数是  $n \times 2^{n-1}$ 。

## 2 CP-nets 的强占优测试

CP-nets 是偏好处理元模型的偏好表示 (Representation) 元素，目的是在其基础上实现各种查询 (Queries) 操作。那么，在 CP-nets 上定义的一些运算就成为偏好描述语言 (Language)。其中，最重要的就是实现配置间的比较。

### 2.1 强占优关系的含义

**定义 6** 设  $N = \langle V, CE \rangle$  是一个 CP-nets，若两个配置  $o, o' \in \Omega$ ，有  $o > o'$ ，表示  $o$  与  $o'$  之间具有强占优关系，为： $o$  强占优于  $o'$ 。判断  $o$  与  $o'$  之间强占优关系是否成立的测试称作强占优测试。

若  $o$  强占优于  $o'$ ，说明配置  $o$  比配置  $o'$  优，即导出图  $G$  中顶点  $o'$  到  $o$  可达。

**定义 7** 设  $G = \langle \Omega, IE \rangle$  是 CP-nets 图  $N$  的导出图，其中

$\Omega = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ , 则矩阵  $\mathbf{B}(G) = [b_{ij}]_{n \times n}$  称为  $G$  的可达矩阵, 其中  $b_{ij}$  表示顶点  $o_i$  到  $o_j$  是否可达 (当  $b_{ij} = 1$  时, 可达; 当  $b_{ij} = 0$  时, 不可达)。

## 2.2 特殊结构 CP-nets 的强占优测试算法

CP-nets 图有多种结构, 很多学者对 CP-nets 的研究都基于图的特定结构。而 CP-nets 图的结构可分为: 可分离的 (Separable CP-nets)<sup>[7]</sup>、链结构的 (Chain-structured of CP-nets)<sup>[8]</sup>、树结构的 (Tree-structured CP-nets)<sup>[9]</sup>、多树结构的 (Polytree CP-nets)、有向路径单连通图 (Directed-path singly connected DAG) 和有向路径多连通图 (Max- $\delta$ -connected DAG)。

文献[1]只研究了树结构的 CP-nets 的强占优测试, 给出了下面的翻转序列查找算法。

### 算法 1 二值树结构的 CP-nets 强占优测试算法

输入 CP-nets 图及任意两个配置  $o, o'$

输出  $o$  是否强占优于  $o'$

初始化变量集  $V$  中的所有变量, 赋初值等于  $o'$  中相应值

Loop:

依次删除  $V$  中这样的叶子变量, 它们的赋值等于  $o$  中对应变量的取值

If  $V$  为空, Then Return 强占优关系成立

Else 在当前  $V$  集赋值的情况下, 寻找自身能提高而其子孙变量不能提高的变量

If 找到这样的变量, (任选一个) 将其翻转赋值

Else Return 强占优关系不成立

对于具有  $n$  个变量的 CP-nets, 该算法的时间复杂度为  $O(n^2)$ 。对于多树结构的 CP-nets, 强占优测试是 P 问题, 对于有向路径单连通图, 则是 NP-complete 问题。那么, 对于一个 DAG 图, 强占优测试是 NP 还是 Harder, 还没有定论。能否找到一种途径或方法, 即忽略 CP-nets 图的特定结构, 简单而又实际地解决强占优测试问题呢? 作者从强占优测试的深层含义出发, 找到了求任意结构 CP-nets 的强占优测试方法。

## 2.3 任意结构 CP-nets 的强占优测试算法

以二值 CP-nets 为例, 强占优测试的本质就是判断导出图中两个顶点的可达性问题。而对于图  $G = (V, E)$ , 从某个顶点出发, 顺着有向边的方向依次寻找下一个能够到达顶点的过程, 类似于图的遍历。所以, 依次从每个顶点出发调用图的深度优先遍历算法 (DFS)<sup>[10]</sup>, 得到每个顶点的可达顶点队列  $Q(i)$ 。

例 2 求图 2 中的强占优关系。其中  $\Omega = \{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6, o_7, o_8\}$ ,  $o_1 = "B_d T_l C_i"$ ,  $o_2 = "B_d T_l C_a"$ ,  $o_3 = "B_d T_d C_a"$ ,  $o_4 = "B_d T_d C_i"$ ,  $o_5 = "B_i T_d C_i"$ ,  $o_6 = "B_i T_l C_i"$ ,  $o_7 = "B_i T_l C_a"$ ,  $o_8 = "B_i T_d C_a"$ 。

解: 通过 8 次调用 DFS 算法, 得到顶点可达对列表, 如表 1 所列。

表 1 顶点及其可达顶点集合

队列	顶点	可达的其它顶点
Q(1)	$o_1$	$o_2, o_3, o_4, o_5, o_6, o_7, o_8$
Q(2)	$o_2$	$o_3, o_4, o_5, o_6, o_7, o_8$
Q(3)	$o_3$	$o_4, o_5, o_6, o_7, o_8$
Q(4)	$o_4$	$o_5, o_6, o_7$
Q(5)	$o_5$	$o_6, o_7$
Q(6)	$o_6$	$o_7$
Q(7)	$o_7$	
Q(8)	$o_8$	$o_5, o_6, o_7$

每一行中, 第三列是第二列中顶点所能到达的顶点集。其中,  $o_i$  所对应的“可达的其它顶点”为空, 代表由  $o_i$  不能到达任何顶点,  $o_i$  是最优配置。

分析: 对于有  $k$  个顶点、 $e$  条边的图, 一次 DFS 算法的时间复杂度为  $O(k+e)$ , 改进的算法调用了  $k$  次 DFS, 其中  $k$  为 CP-nets 导出图中顶点的个数。由定理 1 可知, 二值 CP-nets 导出图的顶点个数是  $2^n$ , 即  $k = 2^n$ , 边的条数是  $n \times 2^{n-1}$ , 即  $e = n \times 2^{n-1}$ 。故算法执行次数为:

$$2^n \times (2^n + n \times 2^{n-1}) = 4^n \times (1 + n/2)$$

而文献[3]虽然解决了任意结构 CP-nets 的强占优测试, 却是一个 PSPACE-complete 问题。

## 3 CP-nets 的一致性

一致性是计算机系统的一个优良特性, 对于描述偏好的 CP-nets 来说, 倘若其不一致, 说明所表达的偏好有自相矛盾的地方, 会对决策者产生误导。而不一致的根本原因在于决策者提供的信息不明确, 或者说决策者提供的信息本身就自相矛盾。所以, 在对一个具体问题建立 CP-nets 模型后, 首先要考虑的问题之一就是判断 CP-nets 的一致性。目前无人对此进行研究, 作者通过分析 CP-nets 一致性的相关定义和性质, 给出了判断一致性的方法。

定义 8<sup>[6]</sup> 设  $N$  为任意一个 CP-nets,  $o_1, o_2, \dots, o_m$  为决策空间  $\Omega$  中的任意  $m$  个配置, 若不存在这样的配置序列  $\langle o_1, o_2, \dots, o_m \rangle$ , 使得  $o_1 > o_2, o_2 > o_3, o_{i-1} > o_i, \dots, o_m > o_1$ , 即  $\langle o_1, o_2, \dots, o_m \rangle$  不构成环形序列, 称该 CP-nets 是一致的。

定义 9<sup>[6]</sup> 设  $\Omega$  是一个包含  $n$  个顶点的 CP-nets 图  $N$  的决策空间, 若存在一个排序序列  $>_N$  包含了  $\Omega$  中的全部配置, 则称  $N$  是可满足的。即

$$o_1 >_{N} o_2 >_{N} o_3 >_{N} \dots >_{N} o_i \dots >_{N} o_k$$

其中  $o_i \in \Omega, k = 2^n$ , 称这个序列为可满足性序列。

若每个决策属性均取值为给定父属性值时对应 CPT 表中的最高值 (或最低值), 则此时对应的配置为最优配置 (或最差配置)。

定理 2 若一个 CP-nets 是一致的, 则其一定具有最优 (或最差) 配置。

证明: 根据 CP-nets 的一致性等价于可满足性的结论<sup>[6]</sup> 可知: CP-nets 是一致的, 则该 CP-nets 也是可满足的。根据可满足性的定义, 可以将所有配置进行排序, 即可满足性序列, 再根据定义 8 知, 具有一致性的 CP-nets 中的任意排序序列均不构成环形序列, 所以, 一个 CP-nets 是一致的, 则一定具有最优配置和最差配置。若最优 (或最差) 配置不止一个, 这些“最优” (或“最差”) 配置称为极优 (或“极差”) 配置。

CP-nets 图结构分为有环图和无环图, 表现在 CP-nets 的各种性质和分析方法上有很大的不同。下面对这两种结构的 CP-nets 的一致性分别进行分析。

### 3.1 无环 CP-nets 的一致性分析

最常见的 CP-nets 图结构是无环的, 即决策属性间没有相互依赖的情况。例如当一个人在买汽车时, 他会在汽车的多个属性如用途、颜色和排量中这样选择: 最先考虑车的用途 (商务用途的车还是家用轿车), 他偏好家用轿车; 对汽车颜色的选择依赖于汽车的用途 (商务用途的车偏好黑色, 而家用轿车则偏好白色); 对排量的选择也依赖于汽车的用途 (商务用

途的车偏好大排量,而家用轿车则偏好小排量)。对应的 CP-nets 图结构如图 3 所示。

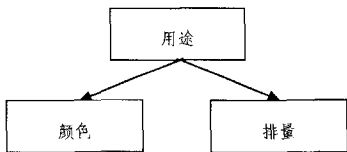


图 3 无环 CP-nets 示例

**定理 3** 任何一个无环 CP-nets 都具有一致性。

证明:已知结论:无环 CP-nets 都是可满足的及 CP-nets 的可满足性等价于一致性<sup>[6]</sup>。所以,无环 CP-nets 具有一致性。

例 3 图 1 所示的 CP-nets 为无环图,从对应的导出图(见图 2)可以清晰地看出配置间不存在环路,即该 CP-nets 是一致性的。最优配置为“ $B_1T_1C_2$ ”,最差配置为“ $B_4T_1C_1$ ”。

### 3.2 有环 CP-nets 的一致性分析

**定理 4** 有环 CP-nets 不一定具有一致性。

证明:通过构造反例来证明有环的 CP-nets 不一定具有一致性,即当某些顶点的条件偏好表发生变化时,其一致性也发生变化。

如图 4 所示,(a)是一个有环的 CP-nets,(b)是给定的一个条件偏好表,其导出图如图 4(c)所示,此时该有环图是一致的;但当条件偏好表如图 4(d)所示时,其导出图则为图 4(e),此时该有环图不一致,因为其中的配置构成了环形序列。可见有环 CP-nets 的一致性是不确定的。

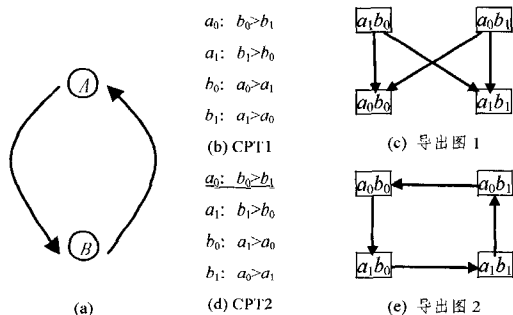


图 4 有环 CP-nets 示例

**定理 5** 若  $N$  为一个不一致的 CP-nets,  $V'$  为  $N$  中环路所包含的决策属性,则  $V'$  对应的配置空间中的所有配置构成一个环形序列。

证明:分析二值且环路中有  $m(m=2)$  个决策属性的 CP-nets,其不具有 consistency。配置空间中的配置数为 4。根据定义 8,CP-nets 不一致,则配置空间中存在着一个环形序列。

假设这个环形序列不包含配置空间中的所有配置,对应的 CP-nets 导出图形态如图 5(a)所示。再具体一些,每个顶点对应具体值,如图 5(b)所示,有一个配置“ $a_0b_0$ ”不在环形序列里面。按照 CP-nets 导出图的定义,导出图中的边集是可交换的配置所构成的有向边集。由于环形序列中不包含全部配置,因此必定在环形序列中有两个配置间的有向边是不成立的。如图 5(b)中的“ $a_0b_1$ ”和“ $a_1b_0$ ”之间的有向边是不成立的,因为这两个配置不是可交换的配置。也就是说环形序列是不存在的,这与前提 CP-nets 不一致相矛盾。所以,环形序列不包含配置空间中的所有配置的假设不成立。

依次可以类推到  $m > 2$  时,该结论成立。

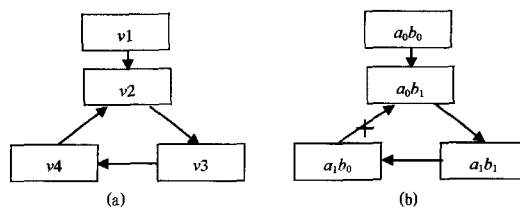


图 5 有环图示例

**推理 1** 若一个 CP-nets 不一致,则其环路所包含的决策属性对应的配置空间中并没有最优配置和最差配置。

证明:根据定理 5,CP-nets 不一致,则其环路所包含的决策属性对应的配置空间中的所有配置构成一个环形序列,即无最优配置和最差配置。

根据定理 4,我们知道有环 CP-nets 是否具有 consistency 与其对应的 CPT 有关。下面给出了通过分析 CPT 来判断 CP-nets 的 consistency 的方法。

1) 将一个有环图的环路部分展开,使其变成一个链图。

具体做法是:选定一个顶点为起始点,在 CP-nets 中增加一个顶点,即这个起始点。顺着有向图的方向走到最后一个顶点,再让最后一个顶点指向新增加的顶点。例如,将图 4(a)所示的有环图转换为图 6(a)所示的链图;对应的 CPT 也进行相应的变换,图 4(b)对应的 CPT 变换为图 6(b)所示的 CPT,图 4(d)对应的 CPT 变换为图 6(c)所示的 CPT。显然,两个 CP-nets 在表达用户偏好关系上是等价的。

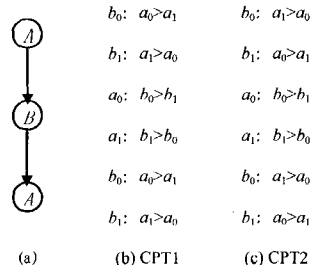


图 6 转换后的 CP-nets

2) 对转换后的 CP-nets 进行分析。

具体做法是:针对每个 CPT 求最优配置。根据定理 2 和推理 1,若 CP-nets 具有最优配置,则该 CP-nets 具有一致性,否则不具有 consistency。而一个 CP-nets 的最优配置为对每个决策属性均取给定父属性值时对应 CPT 中的最高值时的配置。

若每个决策属性均取给定父属性值时对应 CPT 中的最高值,则

$$\text{图 6(b)所示的 CPT 有最优值: } a_0b_0a_0, a_1b_1a_1 \quad (1)$$

$$\text{图 6(c)所示的 CPT 有最优值: } a_0b_0a_1, a_1b_1a_0 \quad (2)$$

因为图 6(a)所示的 CP-nets 中的决策属性有两个 A,这两个 A 实质上是一个,所以最优配置中两个 A 的取值应该相同。对于(1)中的配置,对应有环图 4(a)中的最优配置“ $a_0b_0$ ”,“ $a_1b_1$ ”,即图 6(b)所示的 CPT 对应的 CP-nets 是一致的;对于(2)中的配置,前后两个 A 的取值不同,说明对应的原有环图无最优配置,所以图 6(c)所示的 CPT 对应的 CP-nets 不一致。

例 4 图 7 是一个有环图的简单示例。假设一个决策者要买房考虑的决策属性有:选址(城郊、市区)和价格/ $m^2$ (价高、价低)。决策者的心理是这样的:如果在市区买房,因为市区房价较贵且相对各种服务完善,考虑买价低的房子;若在城

郊买,考虑城郊房价相对便宜,为提高质量更偏好价高的房子。而反过来,价格的选择又影响了决策者选址的心态;他会考虑既然我已经花了大价钱买房,那又何苦跑到城郊那么远的地方,此时更偏好市区的选择。

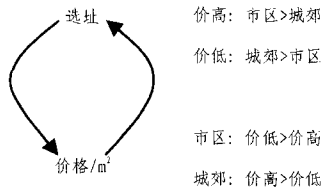


图7 “买房”CP-nets图

根据前面介绍的方法,通过分析其CPT判断出该CP-nets是不一致的,我们也找不出满足决策者需求的最优配置。其实CP-nets的不一致正是反映了决策者患得患失的矛盾心态,这是由于决策者提供的偏好信息本身就矛盾而造成的。

### 3.3 从导出图分析CP-nets的一致性

**定理6(一致性判定定理)** 设 $N$ 为CP-nets具有一致性,则 $N$ 的导出图 $G$ 是DAG图。

一致性的定义用图来描述就是一个DAG图,即 $N$ 的导出图 $G=(\Omega, IE)$ 是DAG图。

有环的CP-nets的一致性是不确定的。根据定理6,可以通过其导出图中是否存在环路来判断CP-nets的一致性。而判断一个图是否为DAG图,采用的方法就是拓扑排序<sup>[10]</sup>。具体的CP-nets一致性判定算法如下所示。

#### 算法2 CP-nets一致性判定算法

```

输入:CP-nets图 $N=(V, CE)$ 
输出:若 $N$ 一致,则输出true,否则输出false
对 $N$ 进行拓扑排序;
If 排序成功 Then Return true //根据定理4,无环图 $N$ 具有一致性
Else {
    构造 $N$ 的导出图 $G=(\Omega, IE)$ ;
    对 $G$ 进行拓扑排序;
    If 排序成功 Then Return true //无环图 $N$ 一致
    Else Return false //无环图 $N$ 不一致
}
    
```

### 3.4 从可达矩阵分析CP-nets的一致性

为了更直观地显示CP-nets强占优测试算法所得到的配置间的强占优关系,将顶点可达对列表改为定义7中的可达矩阵。如例2中 $Q(i)$ 对应的可达矩阵形式如下:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
 \end{bmatrix}$$

对于一个可达矩阵 $B(G)=[b_{ij}]_{n \times n}$ ,其描述了配置间的3种关系:

- 1)  $o_j > o_i$ , if  $b_{ij} = 1$ , 且  $b_{ji} = 0$  (即  $o_i$  到  $o_j$  可达, 而  $o_j$  到  $o_i$  不可达);
- 2)  $o_i$  与  $o_j$  不可比, if  $b_{ij} = 0$ , 且  $b_{ji} = 0$  (即  $o_i$  到  $o_j$  不可达,  $o_j$  到  $o_i$  也不可达);
- 3)  $o_i$  与  $o_j$  相互占优, if  $b_{ij} = 1$ , 且  $b_{ji} = 1$  (即  $o_i$  到  $o_j$  可达,  $o_j$  到  $o_i$  也可达)。

出现关系2)的情况时,说明 $\Omega$ 中存在不可比的两个配置,表明该CP-nets表示偏好是不完备的;出现关系3)的情况时,说明 $\Omega$ 中存在相互矛盾的强占优关系,即 $A > B$ 且 $B > A$ ,根据 $>$ 的传递性,有 $A > A$ 。所以,出现相互占优的关系,表明CP-nets是不一致的。

所以,分析CP-nets的一致性,也可以先对CP-nets进行强占优测试,然后对得到的可达矩阵进行分析,判断是否存在相互占优的关系来进行。

**结束语** 本文描述了偏好表示工具——CP-nets的模型及相关性质,指出CP-nets适合于进行多属性定性偏好决策;主要研究了作为决策内容的强占优测试和一致性问题,详细介绍了相关定理及判断方法。文中首先研究强占优测试,指出其本质是导出图上顶点之间的可达性问题,进而利用多次调用DFS算法实现了求任意结构CP-nets的强占优测试问题;然后研究CP-nets的一致性,给出了一致性的相关定理及判断方法,特别是分别给出了从CPT如何判断CP-nets的一致性和从导出图及从强占优测试得到的可达矩阵如何判断CP-nets的一致性的方法,方法多样,简单灵活。所做的工作为CP-nets的基础理论研究和应用奠定了基础。

进一步的研究方向如下:(1)研究CP-nets的相关性质的应用,即将完备性、一致性及可满足性的研究价值更好地融合到实际应用中;(2)研究CP-nets的其它数学性质,特别是与CP-nets结构之间的关系,深化CP-nets的基础理论。

### 参考文献

- [1] Boutilier C, Brafman R, Domshlak C, et al. CP-nets: a tool for representing and reasoning with conditional ceteris paribus statements[J]. Journal of Artificial Intelligence Research, 2004, 21: 135-191
- [2] Brafman R, Domshlak C. Preference Handling——An Introductory Tutorial[J]. AI Magazine, 2009, 30(1): 58-86
- [3] Goldsmith J, Lang J, Truszczyński M, et al. The computational complexity of dominance and consistency in CP-nets[J]. Journal of Artificial Intelligence Research, 2008, 33(1): 403-432
- [4] Brafman R, Domshlak C, Shimony E. On graphical modeling of preference and importance[J]. Journal of Artificial Intelligence Research, 2006, 25: 389-424
- [5] Bouveret S, Endriss U, Lang J. Conditional Importance Networks: A Graphical Language for Representing Ordinal, Monotonic Preferences over Sets of Goods[C]//Proceedings of the 21st Int Conf on Artificial Intelligence, 2009. San Francisco, USA; Morgan Kaufmann Publishers, 2009: 67-72
- [6] 孙雪皎,刘惊雷. CP-nets的可满足性及一致性研究[J]. 计算机研究与发展, 2012, 49(4): 754-762
- [7] Lang J, Mengin J. The complexity of learning ceteris paribus separable preferences[C]//Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence, 2009. San Francisco, USA; Morgan Kaufmann Publishers, 2009: 848-853
- [8] Sun Xue-jiao, Liu Jing-lei. Representation and Realization of Binary-valued CP-nets in Single-Branch Tree[C]//Proceedings of the 7th Int Conf on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, 2010. Yantai, China; IEEE, 2010: 1908-1911
- [9] Sun Xue-jiao, Liu Jing-lei. Representation and Realization of Binary-valued CP-nets in Directed Tree[C]//Proceedings of the 3rd Int Conf on Biomedical Engineering and Informatics, 2010. Yantai, China; IEEE, 2010: 2941-2944
- [10] 陈守孔,孟佳娜,武秀川. 算法与数据结构(第2版)[M]. 北京:机械工业出版社, 2008: 128-147