Ising 图模型概率推理的计算复杂性

陈亚瑞
(天津科技大学计算机科学与信息工程学院 天津 300222)

摘 要 图模型概率推理的主要任务是通过对联合概率分布进行变量求和来计算配分函数、变量边缘概率分布、条件概率分布等。图模型概率推理计算复杂性及近似概率推理的计算复杂性是一重要的理论问题,也是设计概率推理算法和近似概率推理算法的理论基础。研究了 Ising 图模型概率推理的计算复杂性,包括概率推理的难解性及不可近似性。具体地,通过构建#2SAT 问题到 Ising 图模型概率推理问题的多项式时间计数归约,证明在一般 Ising 图模型上计算配分函数、变量边缘概率分布、条件概率分布的概率推理问题是#P 难的,同时证明 Ising 图模型近似概率推理问题是 NP 难的,即一般 Ising 图模型上的概率推理问题是难解且不可近似的。

关键词 Ising 图模型,概率推理,计算复杂性,难解性,不可近似性
中图法分类号 TP181 **文献标识码** A

Computational Complexity of Probabilistic Inference in Ising Graphical Model

CHEN Ya-rui
(School of Computer Science and Information Engineering, Tianjin Science and Technology University, Tianjin 300222, China)

Abstract Probabilistic inference in graphical model is to compute the partition function, the marginal probability distribution, and the conditional probability distribution through summing variables of the joint probability distribution. The hardness and inapproximability of the probabilistic inference are important problem, and are the foundation to design the probabilistic inference algorithm and approximate probabilistic inference algorithm. We analyzed the computational complexity of the exact probabilistic inference and approximate probabilistic inference. In particular, we constructed a counting reduction from the #2SAT problem to the probabilistic inference problem in polynomial time, and proved that the problem of computing the partition function, marginal probability distribution and conditional probability distribution in a Ising graphical model is #P-hard. Moreover, approximating the probability distribution is NP-hard.

Keywords Ising graphical model, Probabilistic inference, Computational complexity, Hardness, Inapproximability

1 前言

图模型(graphical model)结合了图论和概率论,是建立在图结构上的概率模型,是人工智能学科表示和处理不确定性知识和复杂知识的重要方法[1]。Ising 图模型(Ising graphical model)是定义在 Bernoulli 离散变量集及无向图结构上的图模型,为图像处理、空间统计和社会网络等领域提供了简洁有效的建模方法[2]。图模型概率推理问题通过对联合概率分布进行变量求和来计算模型的对数配分函数、变量边缘概率分布、条件概率分布等[3,4]。

图模型概率推理的计算复杂性和近似概率推理的计算复杂性是概率推理领域一重要的理论问题,也是设计概率推理算法和近似概率推理算法的理论基础[5,6]。已有工作利用可满足性问题的计算复杂性、计数可满足性问题的计算复杂性及可满足性问题到图模型概率推理问题的归约关系,研究了图模型概率推理的计算复杂性及近似概率推理的近似计算复杂性。具体地,Cooper 通过构建可满足性问题到贝叶斯网上概率推理问题的多项式时间归约,证明无约束贝叶斯网络上的一般概率推理问题是 NP 难的,并提出贝叶斯网络近似推理方法的研究方向[7]。之后,Dagum 根据可满足性问题的 NP 难性质,用反证法证明无约束贝叶斯网络上绝对近似推理也是 NP 难的[8]。进一步,Roth 通过构建可满足性计数问题到贝叶斯网络概率推理问题的多项式时间计数归约,证明无约束贝叶斯网络上概率推理问题是#P 完全的,且贝叶斯网络上近似概率推理问题是 NP 难的[9]。Jerrum 研究了经典物理 Ising 无向图模型概率推理的计算复杂性,证明计算配分函数的概率推理问题是#P 完全的[10]。

已有图模型概率推理复杂性研究主要针对有向图模型概率推理的计算复杂性及近似概率推理的计算复杂性,且已有的无向图模型概率推理计算复杂性研究仅包括经典物理 Ising 图模型,同时未分析其近似推理的计算复杂性。针对以上问题,本文研究一般 Ising 图模型精确概率推理和近似概率推理的计算复杂性。

具体地,通过构建合取范式可满足性计数问题(#2SAT)

到稿日期:2012-05-01 返修日期:2012-07-26 本文受天津市高等学校科技发展基金计划项目(20110806),天津科技大学引进人才基金(2011 0404)资助。

陈亚瑞(1982—),女,博士,讲师,主要研究方向为人工智能、理论计算机科学等,E-mail:yrchen@tust.edu.cn。

到 Ising 图模型概率推理问题的多项式时间计数归约，证明在一般 Ising 图模型上计算配分函数、变量边缘概率分布、条件概率分布的概率推理问题是 #P 难的，同时 Ising 图模型上的近似概率推理是 NP 难的。即假设 NP⊈P，Ising 图模型的精确概率推理至少需要指数时间，且给出具有有效近似因子的近似概率推理也需要指数时间。

2 Ising 图模型与复杂性问题类

本节介绍 Ising 图模型[4]及 #P 复杂性问题类[11]。

2.1 Ising 图模型

定义 1(Ising 图模型[4]) Ising 图模型是一 5 元组

$\mathcal{G}=(V,E,\mathbf{x},b,p)$

式中，$V,E,\mathbf{x}$ 均为非空、有限集，且

1. V 表示非空顶点集；
2. $E\subseteq V\times V$ 表示边集；
3. $\mathbf{x}=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 表示伯努利随机变量集，$x_i\in\{0,1\}$，$i\in\{1,\cdots,n\}$；
4. $b:V\rightarrow\mathbf{x}$ 是顶点到随机变量的一一对应；
5. $p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ 表示随机变量 $\mathbf{x}$ 上的指数概率分布：

$$p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})=\exp(\sum_{s\in V}\theta_s x_s+\sum_{(s,t)\in E}\theta_{st}x_s x_t-A(\boldsymbol{\theta})\} \tag{1}$$

$$A(\boldsymbol{\theta})=\log\sum_{\mathbf{x}}\{\sum_{s\in V}\theta_s x_s+\sum_{(s,t)\in E}\theta_{st}x_s x_t\} \tag{2}$$

式中，θ_s,θ_{st} 表示模型参数，$\exp\{\theta_s x_s\}$，$\exp\{\theta_{st}x_s x_t\}$ 表示势函数，$A(\boldsymbol{\theta})$ 表示 Ising 图模型对数配分函数。

Ising 图模型概率推理的关键是通过对联合概率分布 $p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ 进行变量求和或部分变量求和来计算对数配分函数 $A(\boldsymbol{\theta})$、边缘概率分布 $p(x_s)$ 及条件概率分布 $p(x_s|x_t)$。

2.2 #P 复杂性问题类

判定问题(decision problem)是判定一公式是否恒为真或是否可满足，其结果只有两个取值，即 0 或 1，该问题可以看作从 0,1 字符串到 $\{0,1\}$ 值域的映射函数。计数问题(counting problem)是和判定问题对应的一类问题，是计算一公式恰好有几个可满足赋值，计数问题可以看作从 0,1 字符串到自然数 N 的映射函数。显然，计数问题至少和对应的判定问题具有相同的计算复杂性。

定义 2(判定问题) 判定问题是从 $\{0,1\}^*$ 字符串到 $\{0,1\}$ 的映射函数，即

$g:\{0,1\}^*\rightarrow\{0,1\}$

可满足性(satisfiability problem，SAT)问题是一类重要的判定问题，用于判定一个合取范式(cnf)是否是可满足的。2SAT、3SAT 问题是两种特殊的可满足性问题，用于判定一个 2cnf 或 3cnf 公式是否是可满足的。各类可满足性判定问题的计算复杂性分别为 SAT∈NPC，3SAT∈NPC，2SAT∈P[9]。

定义 3(计数问题) 计数问题是从 $\{0,1\}^*$ 字符串到自然数 N 的映射函数，即

$f:\{0,1\}^*\rightarrow N$

计数问题一般用符号 # 表示，可满足性问题对应的计数问题 #SAT 是计算一个合取范式恰好有几个可满足赋值，2SAT、3SAT 问题对应的计数问题分别为 #2SAT，#3SAT。复杂性计数问题可形成一类特殊复杂性问题类——#P 问题类，对于任何输入串 $x\in\{0,1\}^*$ 及计数问题 f，如果存在一个非确定多项式时间图灵机，它接受计算的数目恰好等于 $f(x)$ 的值，则计数问题 f 属于 #P 问题类[11]。

定义 4(#P 问题类) 对于计数问题 $f:\{0,1\}^*\rightarrow N$，若存在一多项式时间函数 $p:N\rightarrow N$ 和一非确定多项式时间图灵机 M，使得任意输入串 $x\in\{0,1\}^*$，有

$f(x)=|\{y\in\{0,1\}^{p(|x|)}:M(x,y)=1\}|$

则 $f(x)$ 属于 #P 问题类。

#P 问题类可以看作 NP 判定问题对应的计数问题的集合，显然 #P 问题类至少和 NP 问题类具有相同的计算复杂性。类似于 NP 完全问题，#P 问题类中也有描述其中最难问题的 #P 完全问题。

定义 5(多项式时间计数归约) 计数问题 f_1 称为可多项式时间计数归约(polynomial-time counting reduction)到计数问题 f_2，记为 $f_1\leqslant_c f_2$，若存在多项式时间可计算函数 h：$\{0,1\}^*\rightarrow\{0,1\}^*$，对每一个 $x\in\{0,1\}^*$，有

$f_1(x)=f_2(h(x))$

函数 h 称为 f_1 到 f_2 的多项式时间计数归约。

定义 6(#P 难的) 计数问题 f 称为 #P 难的，若 #P 中的每个问题 f_1 都可多项式时间计数归约到 f。

定义 7(#P 完全的) 计数问题 f 称为 #P 完全的，若它满足下面两个条件：

(1) f 属于 #P，并且

(2) #P 中的每个计数问题 f_1 都可多项式时间计数归约到 f。

由分析可知，NP 完全问题对应的计数问题都是 #P 完全的，如 #SAT 问题、#3SAT 问题均是 #P 完全的。但是一些 P 类问题对应的计数问题也是 #P 完全的，如 2SAT∈P，而 #2SAT∈#P 完全的[9]。#P 完全问题至少和 NP 完全问题具有相同的计算复杂性，#P 完全问题是难解的，即 #P 完全问题不能在多项式时间内精确求解，故只能采用近似算法进行近似求解。

定义 8(近似算法) 令 $f:\{0,1\}^*\rightarrow N$ 表示计数问题，δ：$Z^+\rightarrow[1,\infty)$ 表示映射函数。若对于任意输入 $x\in\{0,1\}^*$，算法 A 满足

$$\frac{f(x)}{\delta(|x|)}\leqslant A(x)\leqslant f(x)\delta(|x|)$$

则 $A(x)$ 称为 $f(x)$ 的 δ-近似，δ 称为近似算法 $A(x)$ 的近似因子。

如下 #2SAT 问题的计算复杂性引理指出 #2SAT 问题是 #P 完全的，且近似计算 #2SAT 问题是 NP 难的。

引理 1(#2SAT 问题计算复杂性[9]) 对于 #2SAT 问题，令 n 表示 2cnf 公式中变量的个数。#2SAT 问题是 #P 完全的，且对于任意给定的正实数 $\varepsilon>0$，给出近似因子为 $2^{n^{1-\varepsilon}}$ 的近似算法是 NP 难的。

#2SAT 问题的 2cnf 公式共有 2^n 个可能赋值，则可满足赋值的个数 b 满足 $0\leqslant b\leqslant 2^n$。若用近似算法进行近似求解，则近似算法的近似因子至少满足条件 $\alpha<2^n$。根据引理可知，对于任意近似因子 $\alpha=2^{n^{1-\varepsilon}}<2^n$，#2SAT 问题是不可近似的。故引理 1 指出 #2SAT 问题是难解的，且是不可近似的，即 #2SAT 问题不存在多项式时间的精确算法，同时不存在具有有效近似因子的多项式时间近似算法。

Ising 图模型是二值离散型随机变量的概率图模型，其联合概率分布 $p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ 共有 2^n 个概率值，其中 n 表示 Ising 图模

型变量个数。故 Ising 图模型上概率推理问题可以看作一类计数问题，下面结合经典的可满足性计数问题，从理论上研究 Ising 图模型概率推理问题和近似概率推理问题的难解性。

3 计算复杂性定理

本节证明 Ising 图模型概率推理和近似概率推理的计算复杂性定理，指出计算配分函数、边缘概率分布和条件概率分布的概率推理问题是 #P 难的，且近似计算配分函数、边缘概率分布和条件概率分布推理问题是 NP 难的。

3.1 配分函数计算复杂性定理

定理 1(配分函数计算复杂性) 计算 Ising 图模型配分函数的概率推理问题是 #P 难的，且对于任意给定的正实数 ε，给出近似因子为 $2^{n^{1-\varepsilon}}$ 的近似算法是 NP 难的。

证明：通过构建 #2SAT 问题到计算 Ising 图模型配分函数问题的多项式时间计数归约来证明上述定理。该归约可把任一 2cnf 公式 I 映射成一 Ising 图模型 $\mathcal{G}=(V,E,\mathbf{x},b,p)$，并且公式 I 可满足赋值的个数等于 Ising 图模型 $\mathcal{G}$ 配分函数的下取整。

1. 把 2cnf 公式 I 映射成 Ising 图模型 $\mathcal{G}$。

令 I 表示具有 n 个布尔变量 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 和 m 个子句 $\{B_1,\cdots,B_m\}$ 的 2cnf 公式。下面通过公式 I 构建 Ising 图模型 $\mathcal{G}=(V,E,\mathbf{x},b,p)$，包括节点集 V、边集 E、伯努利随机变量集 $\mathbf{x}$、一一对应 b 和概率分布 p。

(1)对于公式 I 中的每个布尔变量 x_i，生成一个节点 v_i，从而形成节点集 V，且 $|V|=n$。

(2)对于每个布尔变量 x_i，生成节点 v_i 的同时生成一个伯努利随机变量，形成伯努利随机变量集 $\mathbf{x}$，且 $|\mathbf{x}|=n$。

(3)对应于同一个布尔变量 x_i 的伯努利随机变量和节点之间存在一一对应关系 b。

(4)对于公式 I 中的每个子句 B_k，产生一个连接相应随机变量的边 $e_k=\{x_i,x_j\}_k$，形成边集 E，且 $|E|=m$。

(5)对于公式 I 中每个子句 B_k 产生一个势函数 $\phi_k(x_i,x_j)$，$k\in\{1,\cdots,m\}$，$i,j\in\{1,\cdots,n\}$。不同的子句形式对应于不同的势函数：

$$x_i\vee x_j:\phi_k(x_i,x_j)=\exp\{\theta_{ij}(1-x_i)(1-x_j)\}$$
$$x_i\vee\bar{x}_j:\phi_k(x_i,x_j)=\exp\{\theta_{ij}(1-x_i)x_j\}$$
$$\bar{x}_i\vee x_j:\phi_k(x_i,x_j)=\exp\{\theta_{ij}x_i(1-x_j)\}$$
$$\bar{x}_i\vee\bar{x}_j:\phi_k(x_i,x_j)=\exp\{\theta_{ij}x_ix_j\}$$

该势函数具有如下性质，即若子句 B_k 是可满足的，则势函数 $\phi_k(x_i,x_j)=1$；否则，势函数 $\phi_k(x_i,x_j)=\exp\{\theta_{ij}\}$。伯努利随机变量集 $\mathbf{x}$ 的联合概率分布 $p(\mathbf{x})$ 为：

$$p(\mathbf{x})=\frac{1}{Z}\prod_{k=1}^{m}\phi_k(x_i,x_j)$$

此时完成从 2cnf 公式 I 到 Ising 图模型 $\mathcal{G}$ 的构造，且该构造过程是多项式时间的。

2. 把 #2SAT 问题转化成计算 Ising 图模型配分函数问题。

#2SAT 问题是计算 2cnf 公式 I 中的可满足子句个数，此时假设 2cnf 公式 I 是可满足的，且有 r 个可满足赋值。由 2cnf 公式 I 构造的 Ising 图模型 $\mathcal{G}$ 的配分函数 Z 为：

$$Z=\sum_{x_1,\cdots,x_n}\prod_{k=1}^{m}\phi_k(x_i,x_j)$$

公式 I 的每一个可满足赋值，使得 $\prod_{k=1}^{m}\phi_k(x_i,x_j)=1$，则 r 个可满足赋值下的求和式 $\sum\prod_{k=1}^{m}\phi_k(x_i,x_j)=r$。若 Ising 图模型参数满足 $\forall\{i,j\}\in E,\exp\{\theta_{ij}\}<2^{-n}$，则可知：

$$Z=\sum_{x_1,\cdots,x_n}\prod_{k=1}^{m}\phi_k(x_i,x_j)\leqslant r+(2^n-r)\cdot\exp\{\theta_{ij}\}$$

即

$$\lfloor Z\rfloor=r$$

式中，$\lfloor Z\rfloor$ 表示实数 Z 下取整。

3. 配分函数计算复杂性。

由上述归约过程可知，#2SAT 问题可多项式时间计数归约到计算 Ising 图模型配分函数的概率推理问题。根据 #P 难问题定义 6 及 #2SAT 计算复杂性引理 1 可知，计算 Ising 图模型配分函数的概率推理问题是 #P 难的，且对于任意给定的正实数 $\varepsilon>0$，给出近似因子为 $2^{n^{1-\varepsilon}}$ 的近似算法是 NP 难的。

下面以例说明 Ising 图模型的归约构造过程。实例 $I=(x_1\vee\bar{x}_2)\wedge(\bar{x}_1\vee\bar{x}_3)\wedge(x_2\vee x_4)\wedge(x_3\vee\bar{x}_4)$ 对应的 Ising 模型图结构如图 1 所示，实例 I 中的子句对应的势函数分别为：

$$x_1\vee\bar{x}_2:\phi_1(x_1,x_2)=\exp\{\theta_{12}(1-x_1)x_2\}$$
$$\bar{x}_1\vee\bar{x}_3:\phi_2(x_1,x_3)=\exp\{\theta_{13}x_1x_3\}$$
$$x_2\vee x_4:\phi_3(x_2,x_4)=\exp\{\theta_{24}(1-x_2)(1-x_4)\}$$
$$x_3\vee\bar{x}_4:\phi_4(x_3,x_4)=\exp\{\theta_{34}(1-x_3)x_4\}$$

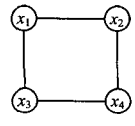

图 1 实例 $I=(x_1\vee\bar{x}_2)\wedge(\bar{x}_1\vee\bar{x}_3)\wedge(x_2\vee x_4)\wedge(x_3\vee\bar{x}_4)$ 对应的无向图

此时 Ising 图模型的联合概率分布为：

$$p(\mathbf{x})\propto\prod_{k=1}^{4}\phi_k(x_i,x_j)$$

根据定理 1 可知计算 Ising 图模型配分函数是难解的，同时 Ising 图模型配分函数是不可近似的。具体地，变量 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 有 2^n 个可能取值，当 Ising 图模型参数满足条件 $\forall\{i,j\}\in E,\exp\{\theta_{ij}\}<2^{-n}$ 时，配分函数 $1\leqslant Z\leqslant 2^n$，其中 1 表示 2cnf 公式仅有一个可满足赋值(#2SAT 问题仅考虑 2cnf 公式是可满足式的情况)，2^n 表示 2cnf 公式有 2^n 个可满足赋值。此时近似计算配分函数的近似因子 α 满足条件 $\alpha\leqslant 2^n$。同时根据定理 1 可知，对于计算 Ising 图模型配分函数的概率推理问题，给出近似因子为 $2^{n^{1-\varepsilon}}$ 的近似算法是 NP 难的，故近似计算配分函数是 NP 难的，即 Ising 图模型上计算配分函数的概率推理问题是难解的，且近似计算配分函数的概率推理问题也是难解的。

3.2 计算复杂性推论

推论 1(边缘概率分布计算复杂性) 计算 Ising 图模型边缘概率分布的概率推理问题是 #P 难的，且对于任意给定的正实数 ε，给出近似因子为 $2^{n^{1-\varepsilon}}$ 的近似算法是 NP 难的。

证明：在 Ising 图模型 $\mathcal{G}=(V,E,\mathbf{x},b,p)$ 上，讨论计算变量 x_t 的边缘概率 $p(x_t=1)$ 的概率推理问题。

首先令变量 $x_t=1$，对包含 x_t 的 Ising 图模型势函数 $\phi_k(x_t,x_j)$ 进行如下修改：

1. 删除 $x_t\vee x_j$ 对应的势函数 $\phi_k(x_t,x_j)$。

2. 删除 $x_t \vee \bar{x}_j$ 对应的势函数 $\phi_k(x_t, x_j)$。

3. 修改 $\bar{x}_t \vee x_j$ 对应的势函数为 $\hat{\phi}_k(x_t, x_j) = \exp\{\theta_{tj}(1-x_j)\}$。

4. 修改 $\bar{x}_t \vee \bar{x}_j$ 对应的势函数为 $\hat{\phi}_k(x_t, x_j) = \exp\{\theta_{tj} x_j\}$。

对于不包含 x_t 的势函数 $\phi_k(x_i, x_j)$，令其保持不变，即 $\hat{\phi}_k(x_i, x_j) = \phi_k(x_i, x_j)$。此时边缘概率 $p(x_t=1)$ 为：

$$p(x_t=1) = \frac{1}{Z} \sum_{\mathbf{x}/x_t, x_t=1} \prod_{k=1}^{m} \phi_k(x_i, x_j) = \frac{1}{Z} \sum_{\mathbf{x}/x_t,} \prod_{k=1}^{m} \hat{\phi}_k(x_i, x_j)$$

根据定理 1 可知，计算配分函数 $Z = \sum_{\mathbf{x}} \prod_{k=1}^{m} \phi_k(x_i, x_j)$ 是 #P难的，且对于任意给定的正实数 $\varepsilon_1 > 0$，给出近似因子为 $2^{n^{1-\varepsilon_1}}$ 的近似算法是 NP 难的。同理，计算 $\sum_{\mathbf{x}/x_t} \prod_{k=1}^{m} \hat{\phi}_k(x_i, x_j)$ 是 #P难的，且对于任意给定的正实数 $\varepsilon_2 > 0$，给出的近似因子为 $2^{n^{1-\varepsilon_2}}$ 的近似算法是 NP 难的。

故计算边缘概率 $p(x_t=1)$ 是 #P 难的，且对于任意给定的正实数 $\varepsilon > 0$，给出的近似因子为 $2^{n^{1-\varepsilon_1}} 2^{(n-1)^{1-\varepsilon_2}} = 2^{O(n^{1-\varepsilon})}$ 的近似算法是 NP 难的。

推论 2(条件概率分布计算复杂性)　计算 Ising 图模型条件概率分布的概率推理问题是 #P 难的，且对于任意给定的正实数 ε，给出的近似因子为 $2^{O(n^{1-\varepsilon})}$ 的近似算法是 NP 难的。

证明：在 Ising 图模型 $\mathcal{G} = (V, \mathbf{E}, \mathbf{x}, b, p)$ 上，讨论计算单变量条件概率分布 $p(x_s \mid x_t)$ 的概率推理问题。条件概率分布为：

$$p(x_s=1 \mid x_t=1) = \frac{p(x_s=1, x_t=1)}{p(x_t=1)} = \frac{\sum_{\mathbf{x}/x_s, x_t, x_s=1, x_t=1} \prod_k \phi_k(x_i, x_j)}{\sum_{\mathbf{x}/x_s, x_t} \prod_k \phi_k(x_i, x_j)}$$

根据定理 1 可知，计算 $p(x_t=1)$ 是 #P 难的，且对于任意给定的正实数 $\varepsilon_1 > 0$，给出的近似因子为 $2^{O(n^{1-\varepsilon_1})}$ 的近似算法是 NP 难的。同理，计算 $p(x_s=1, x_t=1)$ 是 #P难的，且对于任意给定的正实数 $\varepsilon_2 > 0$，给出的近似因子为 $2^{O(n^{1-\varepsilon_2})}$ 的近似算法是 NP 难的。故计算条件概率分布 $p(x_s=1 \mid x_t=1)$ 是 #P 难的，且对于任意给定的正实数 ε，给出的近似因子为 $2^{O(n^{1-\varepsilon_1})} 2^{O(n^{1-\varepsilon_2})} = 2^{O(n^{1-\varepsilon})}$ 的近似算法是 NP 难的。

定理 2(概率推理计算复杂性)　Ising 图模型概率推理问题是 #P 难的，且对于任意给定的正实数 ε，给出的近似因子为 $2^{O(n^{1-\varepsilon})}$ 的近似算法是 NP 难的。

证明：Ising 图模型概率推理问题包括计算配分函数、边缘概率分布和条件概率分布。根据计算复杂性定理可知，3 类概率推理问题具有相同的计算复杂性和近似计算复杂性，即 Ising 图模型概率推理问题是 #P 难的，且对于任意给定的正实数 ε，给出的近似因子为 $2^{O(n^{1-\varepsilon})}$ 的近似算法是 NP 难的。

3.3　算法计算复杂性

针对 Ising 图模型 $\mathcal{G}$ 上计算对数配分函数 $A(\boldsymbol{\theta})$ 的概率推理问题，即：

$$A(\boldsymbol{\theta}) = \log \sum_{\mathbf{x}} \{ \sum_{s \in V} \theta_s x_s + \sum_{(s,t) \in E} \theta_{st} x_s x_t \}$$

若采用蛮力搜索算法进行精确推理，其计算复杂性为 $O(2^n)$，其中 n 表示图模型 $\mathcal{G}$ 中节点变量的个数。若利用联合树算法(junction tree algorithm)进行精确推理，其计算复杂性为 $O(2^d)$，其中 d 表示图模型的树宽，由 Ising 图模型结构决定[12]。仅当 Ising 图模型树宽较小时，如树型结构或链式结构图模型，精确概率推理的计算复杂性为多项式时间的。由此可知，一般 Ising 图模型上精确概率推理需要指数时间。

Ising 图模型上的确定性近似推理算法包括环传播算法(loopy belief propagation)[13]、期望传播算法(expectation propagation)[14]、变分推理方法(variational inference)[3]等。这些近似推理算法可在多项式时间给出目标函数近似值，但或给出目标收敛条件，或未分析近似推理误差界、未给出近似因子。故针对一般 Ising 图模型的概率推理问题，给出的近似为 $2^{O(n^{1-\varepsilon})}$ 的近似算法是 NP 难的。

Ising 图模型概率推理复杂性定理从理论上证明，Ising 图模型推理问题是难解且不可近似的。故需在 Ising 图模型结构受控或模型参数受控的条件下设计 Ising 图模型精确概率推理算法和近似概率推理算法，也可从理论上分析概率推理难解性的实质，如从 Ising 图模型参数的角度初步分析了概率推理难解性实质[6]。

结束语　本文研究了 Ising 图模型概率推理和近似概率推理的计算复杂性，证明了 Ising 图模型概率推理问题是难解，且是不可近似的。Ising 图模型概率推理问题可以看作一种计数问题，经典计数问题 #2SAT 问题是难解的且不可近似的，本文通过构建 #2SAT 问题到 Ising 图模型概率推理问题的多项式时间计数归约，证明了 Ising 图模型概率推理问题的难解性和不可近似性。该定理从理论上证明一般 Ising 图模型精确概率推理需要指数时间，且给出具有有效近似因子的近似概率推理也需要指数时间。Ising 图模型概率推理计算复杂性定理为精确概率推理算法和近似概率推理算法设计提供了重要的理论支持，也为进一步概率推理复杂性及复杂性实质等理论研究提供了有效范例。

参 考 文 献

[1] Parisi G. Statistical field theory [M]. Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1988: 110-153

[2] Jordan M I. Graphical models [J]. Statistical Science, 2004, 19(1): 140-155

[3] Wainwright M J, Jordan M I. Graphical models, exponential families, and variational inference [J]. Foundations and Trends in Machine Learning, 2008, 1(1/2): 1-305

[4] 陈亚瑞. 基于消息传播的图模型近似变分推理[D]. 天津：天津大学，2011

[5] Chandrasekaran V, Srebro N, Harsha P. Complexity of inference in graphical models [C]// Proceedings of the 25th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. AUAI Press: Corvallis, Oregon, 2009: 70-78

[6] 陈亚瑞，廖士中. Ising 图模型概率推理的参数化复杂性 [J]. 计算机科学，2010, 37(10): 207-210, 245

[7] Cooper G F. The computational complexity of probabilistic inference using Bayesian belief networks [J]. Aritificial Intelligence, 1990, 42(2/3): 393-405

[8] Dagum P, Luby M. Approximating probabilistic inference in Bayesian belief networks is NP-hard [J]. Artificial Intelligence, 1993, 60(1): 141-153

(下转第 288 页)

示。采用局部二值模式(LBP)[11]提取面部光泽度及眼睛神采特征(对应于白色分块);采用 Gabor 小波滤波器[12]提取弯月形突起的眼袋特征及印堂"川"字型纹理特征(对应于黑色分块);采用轮廓线曲线拟合提取嘴唇中缝线形状特征(对应于灰色分块),将各种特征融合成一种混合特征后,采用流形保持投影[13]进行特征选择和降维。最后,利用最近邻分类器(KNN)对脸部疲态进行分类,分类时,利用 K 个近邻的投票占总票数的比例作为属于某一概念(疲劳、疑似疲劳、清醒)的分值,该分值即为特征 c_7 的值。

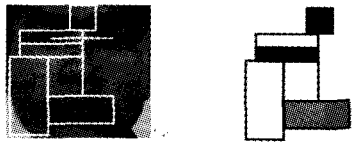

图 3　脸部区域分块示意图

4.3　实验结果与比较

为了验证本文模型的有效性,将本文模型计算结果与专家打分结果和 Qiang Ji 等人提出的动态贝叶斯模型[2]结果进行了比较,对 30 段测试视频的比较结果如图 4 所示,其中打分的专家与对测试样本进行标注的专家为同一群专家。

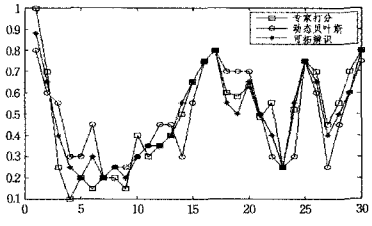

图 4　测试视频实验结果对比

从图中可以看出,本文方法与专家打分结果及 Qiang Ji 等人的方法具有很强的相关性;超过半数(18 个,占 60%)的点相对于 Qiang Ji 等人的方法更接近于专家的打分结果,剩下的 12 个点中有 10 个(占 33%)与 Qiang Ji 等人的方法结果相同,只有 2 个(占 7%)点是远离专家打分结果。

结束语　在基于面部视频的实时精神疲劳辨识过程中,融合工作、生活负担及睡眠情况等背景信息的辨识方法的准确性要大大高于未融合背景信息的方法,但是背景信息无法直接从面部视频中获取,在背景信息的重要性与其利用面部视频可获取性方面产生了矛盾。为此,本文通过引入可拓学的矛盾转化思想和方法,结合已有的经典数学工具和计算机视觉技术,提出和构建了一种全新的精神疲劳辨识模型。本文所提出的模型能够将基于面部视频不可计算的工作负担、生活压力、睡眠质量等背景信息转化为与背景信息相关联的,可以有效反映这些背景信息的面部疲态的计算,而后者可以利用现有的计算机视觉技术进行估计,不需要通过主观调查表的方式获取有关的先验知识和条件概率。概括起来,本文研究的意义在于:第一,为基于面部视频的精神疲劳辨识提供了一种全新的有效模型;第二,为计算机模拟人类智能、自动解决矛盾问题提供了一个典型的应用实例;第三,本文方法也为其它类似矛盾问题的解决提供了一种新的思路。实验结果验证了本文模型的有效性。

参 考 文 献

[1] Ji Qiang, Zhu Zhi-wei, Lan Pei-lin. Real-Time Nonintrusive Monitoring and Prediction of Driver Fatigue[J]. IEEE Transactions on Vehicular Echnology, 2004, 53(4): 1052-1068

[2] Ji Qiang, Lan Pei-lin, Looney C. A Probabilistic Framework for Modeling and Real-Time Monitoring Human Fatigue[J]. IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics, PartA: System and Humans, 2006, 36(5): 862-875

[3] 杨春燕,蔡文. 可拓工程[M]. 北京:科学出版社,2007:18-97

[4] 李仕维,李乃民,王春燕,等. 人体疲劳面部变化观察[J]. 中国健康月刊,2011,30(7):70-71

[5] 王磊,吴晓娟,巴本冬,等. 一种基于视觉的 PERCLOS 特征提取方法[J]. 计算机工程与科学,2006,28(6):52-54

[6] Ji Q, Yang X. Real time visual cues extraction for monitoring driver vigilance[C]// Lecture Notes presented at the Proc. Int. Workshop Computer Vision Systems, 2001. Vancouver, Canada: Springer, 2001: 107-124

[7] 葛宏志. 单目摄像机实现的注视方向估计研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2011

[8] Norimatsu Y, Mita S, Kozuka K, et al. Detection of the gaze direction using the time varying image processing[C]// Proceedings of IEEE International Conference on Intelligent Transportation Systems, 2003. Vol. 1, Nagoya, Japan: IEEE, 2003: 74-79

[9] Abtahi S, Hariri B, hammadi S S. Driver Drowsiness Monitoring based on Yawning Detection[C]// International Instrumentation and Measurement Technology Conference 2011. Hangzhou, China, 2011: 1606-1610

[10] Zhu Z, Ji Q. 3D face pose tracking from an uncalibrated monocular camera[C]// the 17th Int. Conf. on Pattern Recognition, 2004. vol. 4, Cambridge, U. K., 2004: 400-403

[11] 付晓峰,韦巍. 基于高级局部二元模式直方图映射的表情识别[J]. 模式识别与人工智能,2009,22(1):123-128

[12] 何源,罗予频,胡东成. 基于测地线活动区域模型的非监督式纹理分割[J]. 软件学报,2007,18(3):592-599

[13] 张伟,夏利民,罗大庸. 基于流形保持投影的驾驶疲劳识别[J]. 信息与控制,2011,40(1):119-123

(上接第 256 页)

[9] Roth D. On the hardness of approximate reasoning [J]. Artificial Intelligence, 1996, 82(1/2): 273-302

[10] Jerrum M, Sinclair A. Polynomial-time approximation algorithms for the Ising model [J]. SIAM Journal on Computing, 1993, 22(5): 1087-1116

[11] Arora S, Barak B. Computational complexity: a modern approach [M]. Cambridge University Press, 2009

[12] Jaakkola T M. Tutorial on variational approximation methods [M]. Opper M, Saad D, eds. Advanced Mean Field Methods: Theory and Practice, The MIT Press, 2001: 129-159

[13] Mooij J M, Kappen H J. Sufficient conditions for convergence of loopy belief propagation [J]. IEEE Information Theory, 2007, 53: 4422-4437

[14] Minka T. Expectation propagation for approximate Bayesian inference [C]// Proceedings of the 17th Conference on Uncertainty in Artificial Inference. 2001, 17: 362-369