

灰色理论和马尔可夫相融合的粮食产量预测模型

向昌盛¹ 张林峰²

(湖南工程学院计算机与通信系 湘潭 411104)¹ (湖南农业大学信息科学技术学院 长沙 410128)²

摘要 鉴于粮食产量受多种复杂因素的影响并具有较强的随机性和波动性,建立了一种灰色理论和马尔可夫相融合的粮食产量预测模型。首先采用灰色关联法筛选粮食产量影响因子,然后将其输入到灰色系统中构建粮食产量的灰色预测模型,最后使用马尔可夫模型对灰色模型的粮食产量预测结果的残差值进行修正,以提高粮食产量预测精度。仿真结果表明,提出的预测模型具有较好预测的精度,完全能满足粮食产量预测精度的要求。

关键词 粮食产量,灰色理论,残差修正,马尔可夫模型

中图分类号 TP309 文献标识码 A

Grain Yield Prediction Model Based on Grey Theory and Markov

XIANG Chang-sheng¹ ZHANG Lin-feng²

(Department of Computer and Communication, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan 411104, China)¹

(Information Science and Technology Institute, Hunan Agricultural University, Changsha 410128, China)²

Abstract The grain yield is influenced by many complex factors, and it has the characteristics of random and fluctuation, so this paper proposed a grain yield prediction model based on grey theory and Markov model. Firstly, the grey relational grade was used to screen influencing factor to build the grain yield prediction based on grey model, and then the Markov process was used to modify the forecasting error, making the prediction accuracy increases greatly. The simulation results show that the proposed algorithm has better prediction accuracy, and the model can satisfy the demand in prediction precision.

Keywords Coal demand, Grey theory, Residual modification, Markov model

粮食生产对于社会、经济的稳定起着十分重要的作用,粮食产量的准确预测可以为科学决策提供依据,从而保证国家的粮食安全^[1]。

当前,传统粮食产量预测方法主要有指数平滑法、线性回归模型、时序分析^[2],这些方法简单,容易实现,但均是基于线性建模,只适用于短期粮食产量预测。后来,随着非线性预测方法的发展,出现了支持向量机、神经网络、马尔可夫模型、粗糙集理论等非线性预测方法,提高了粮食产量的预测精度^[3]。近年来,基于组合预测理论,苏博等提出了一种灰色关联神经网络的粮食产量预测模型^[4];李秀峰等建立了灰色神经网络的粮食产量组合预测模型^[5];李炳军等将线性回归模型和GM(1,1)模型组合在一起,用于河南省粮食产量的组合预测^[6]。组合模型能够利用单一模型优点,进行优势互补,一定程度上提高了粮食产量的预测精度。然而粮食产量形成是一个十分复杂的生物学和生态学过程,粮食产量及其影响因素之间存在着灰色性、不确定性、模糊性,对粮食产量进行建模预测时,影响因子筛选对预测结果十分关键。灰色关联分析(Grey relational analysis, GRA)可对所有影响因素进行全面的定量分析,选择对因变量影响大的因子作为预测模型的输入,克服了主观因素造成的不确定性,因此灰色关联分析为解

决粮食产量因子筛选问题提供了一种新的研究方法^[7]。

为进一步提高粮食产量预测精度,提出了一种灰色理论和马尔可夫相结合的粮食产量预测模型(GMM)。首先采用灰色关联方法选择 N 个粮食产量主要影响因子,然后构建粮食产量的 GM(1, N) 预测模型,最后采用马尔可夫模型对 GM(1, N) 预测结果残差进行修正。仿真结果表明, GMM 可以获得较高的预测精度,完全能满足粮食产量预测精度的要求。

1 灰色理论和马尔可夫模型

1.1 灰色关联分析建模步骤

(1) 设获取的粮食产量特征序列为:

$$X_0 = \{x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(n)\} \tag{1}$$

被比较序列为:

$$X_i = \{x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n)\} \tag{2}$$

(2) 各因素间的量纲不同,数量级相差很大,须对原始数据进行无量纲处理,消除量纲不同带来的不利影响^[8]。

(3) 对参考数列与被比较数列绝对差的最大值和最小值进行求解。灰色关联度系数 $\epsilon^{(k)}$ 按如下公式计算:

$$\epsilon_i^{(k)} = \frac{\min |X_0^{(k)} - X_i^{(k)}| + \rho \cdot \max |X_0^{(k)} - X_i^{(k)}|}{|X_0^{(k)} - X_i^{(k)}| + \rho \cdot \max |X_0^{(k)} - X_i^{(k)}|} \tag{3}$$

(4) 求解关联度,并按照从大到小的顺序依次排列关联

到稿日期:2012-05-22 返修日期:2012-08-01 本文受湖南省教育厅研究项目(10C0803)资助。

向昌盛(1971—),男,博士,副教授,主要研究方向为生物信息学、人工智能技术, E-mail: cx5243879@sohu.com; 张林峰(1965—),男,副教授,主要研究方向为混沌时间序列、模式识别, E-mail: zlf@hunau.net(通信作者)。

度,关联度最大的为主要因子。

$$\gamma(X_0, X_i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_i^k(x_0^{(k)}, x_i^{(k)}) \quad (4)$$

1.2 灰色和马尔可夫模型

1.2.1 灰色预测模型

对于 n 个变量: x_1, x_2, \dots, x_n , 每个变量有 m 个对应数据, 则可形成 n 个数 $x_i^{(0)} (i=1, 2, \dots, n)$, 即

$$x_i^{(0)} = \{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(m)}\} \quad (5)$$

对 $x_i^{(0)}$ 进行累加生成 $x_i^{(1)}$, 即

$$x_i^{(1)} = (x_i^{(1)}(1), x_i^{(1)}(1) + x_i^{(1)}(2), \dots, x_i^{(1)}(m-1) + x_i^{(1)}(m)) \quad (6)$$

对 n 个数列可建立微分方程, 即

$$\frac{d(x_i^{(1)})}{dt} + a x_i^{(1)} = b_1 x_2^{(1)} + b_2 x_3^{(1)} + \dots + b_{n-1} x_n^{(1)} \quad (7)$$

参数可表示为 $a = (ab_1 b_2 \dots b_{n-1})^T = (B^T B)^{-1} B^T y$, 可得 GM(1, N) 模型为:

$$\hat{x}_i^{(1)}(j+1) = [x_i^{(0)}(1) - \frac{1}{a} \sum_{i=2}^n b_{i-1} x_i^{(1)}(j+1)] e^{-aj} + \frac{1}{a} \sum_{i=2}^n b_{i-1} x_i^{(1)}(j+1) \quad (8)$$

数据还原:

$$\hat{x}_i^{(0)}(j+1) = \hat{x}_i^{(1)}(j+1) - \hat{x}_i^{(0)}(j), (j=1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

式中, $\hat{x}_i^{(0)}(j+1)$ 为第 $j+1$ 期的预测值^[9]。

1.2.2 马尔可夫模型

(1) 状态的划分

把数据序列划分为 n 个状态。

(2) 计算转移概率

$$p_{ij}(k) = \frac{n_{ij}(k)}{n_i}, i=1, 2, \dots, n \quad (10)$$

式中, n 表示状态种类。

(3) 建立状态转移概率矩阵

$$p(k) = \begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} & \dots & p_{1n}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} & \dots & p_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1}^{(k)} & p_{n2}^{(k)} & \dots & p_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (11)$$

式中, $p_{ij}^{(k)}$ 为状态 i 经过 k 步转移到状态 j 的概率; $n_{ij}^{(k)}$ 为状态 i 经过 k 步转移到状态 j 的样本数; n_i 为处于状态 i 的样本数。

(4) 计算预测值

确定了预测对象最有可能的状态转移, 也就确定了预测值变动的灰区间, 取灰区间中间值作为最后的预测值^[10]。

$$\hat{y}(j) = \hat{x}^{(0)}(j) + \frac{a_j + b_j}{2} \quad (12)$$

2 灰色马尔可夫的粮食产量预测模型

灰色模型可以揭示数据的发展趋势, 但不适合波动性较大的数据序列预测; 马尔可夫模型适合描述波动性较大的数据序列, 因此结合两者优点可以建立灰色马尔可夫的粮食预测模型。具体步骤为:

(1) 收集粮食产量历史数据, 并从中找出主要特征数据序列 x_1 和粮食产量影响因子序列 x_2, \dots, x_m 。

(2) 对所有粮食产量影响因子 X_i 进行灰色关联分析, 选择主要影响因子序列, 并记为 $x_2, \dots, x_n (n < m)$ 。

(3) 对每个序列 $x_i (i=1, 2, \dots, m)$ 做一次累加, 建立灰色

GM(1, N) 模型。

(4) 求解模型, 计算参数列, 预测 n 个序列数据 $\hat{x}_i^{(0)}(i)$, 并给出预测结果的相残差序列 $\varepsilon_i, \varepsilon_i = x_i^{(0)}(i) - \hat{x}_i^{(0)}(i)$ 。

(5) 对 ε_i 进行状态划分, 并计算转移概率矩阵 P_{ps} 。本研究将残差序列划分为两个状态, 即当残差为正值时, 定义为状态 1, 残差为负值时, 定义为状态 2, 求出马尔可夫链的状态转移概率矩阵, 并计算状态转移概率。

(6) 根据步骤(5)得出 ε_i 的状态趋势。设 $s^{(0)} = [s_1^{(0)} \quad s_2^{(0)}]$ 为初始状态概率向量, $s_1^{(0)}$ 和 $s_2^{(0)}$ 分别为处于状态 1 和 2 的概率, 经过 n 步状态转移之后的概率为 $s^{(n)} = [s_1^{(n)} \quad s_2^{(n)}] = s^{(0)} \cdot P_{ps}(n)$, $s^{(n)}$ 是残差处于第 i 时刻的状态概率。由于采用正负两种状态, 因此符号函数 $\varphi(i)$ 的判断为:

$$\varphi(i) = \begin{cases} +1, & s_1^{(i)} > s_2^{(i)} \\ -1, & s_1^{(i)} < s_2^{(i)} \end{cases} \quad (13)$$

(7) 根据式(13)符号函数 $\varphi(i)$ 求带符号预测误差数据 ε_i' 。

$$\varepsilon_i' = \varphi(i) \cdot \hat{\varepsilon}_i = \varphi(i) \cdot [[\varepsilon(i) - \frac{u}{a}] \cdot e^{-a(i-1)}] \quad (14)$$

(8) 根据 GM(1, N) 预测值 $\hat{x}_i^{(0)}(i), (i=1, 2, \dots, n)$ 和预测误差数据 ε_i' , 得到预测值 $\hat{x}_i^{(0)}(i) = \hat{x}_i^{(0)} - \varepsilon_i'$ 。

3 粮食产量预测实证分析

3.1 数据来源

为验证基于 GMM 的粮食产量预测模型的性能, 选取我国 1990—2011 年的粮食总产量(X1)为特征变量, 以粮食单位面积产量(x_1 , kg/hm²)、农业劳动力(x_2 , 万)、机械总动力(x_3 , 亿 W)、受灾面积(x_4 , 千 hm²)、粮食播种面积(x_5 , 千 hm²)、有效灌溉面积(x_6 , 千 hm²)、化肥施用量(x_7 , 万吨)、农村用电量(x_8 , 亿 kWh)等共 8 个变量作为影响因素数。以 1990—2005 年粮食产量作为模型的拟合数据, 2006—2011 年粮食产量作为模型的预测检验数据。1990—2011 年粮食产量具体如图 1 所示, 数据来自《中国统计年鉴 2011》(中华人民共和国国家统计局, 网址: <http://www.stats.gov.cn/>)。

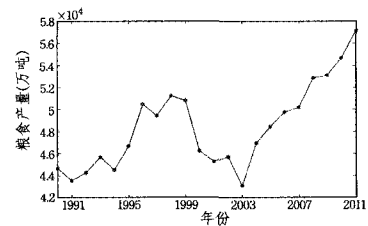


图 1 粮食产量历史数据

3.2 数据预处理

为便于模型训练, 更好地反映各因素之间的相互关系, 需对粮食产量样本数据进行预处理。一般模型各分量值应在 $[0, 1]$ 之间, 因此模型训练之前, 将输入样本归一化, 具体处理如下:

$$x_{normal} = \frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \quad (15)$$

3.3 粮食产量的灰色关联度计算

根据上述灰色关联度计算步骤, 求出各粮食产量与各因子之间的关联度, 并按大小顺序排列, 结果如表 1 所列。

表 1 灰色关联分析结果

影响因素	1990—1994		1995—1999		2000—2004		2005—2011		1990—2010	
	灰色关联度	排序	灰色关联度	排序	灰色关联度	排序	灰色关联度	排序	灰色关联度	排序
x_1	0.6501	4	0.8012	2	0.7076	2	0.4159	8	0.6550	3
x_2	0.7615	3	0.4835	7	0.6040	7	0.7356	1	0.7314	1
x_3	0.6429	5	0.7535	3	0.7020	3	0.4377	7	0.6421	4
x_4	0.5062	7	0.8146	1	0.6178	6	0.6066	3	0.6186	5
x_5	0.7618	2	0.5627	5	0.6756	4	0.5232	5	0.6767	2
x_6	0.5641	6	0.5617	6	0.7362	1	0.5700	4	0.6120	6
x_7	0.7754	1	0.4462	8	0.5418	8	0.6204	2	0.6106	7
x_8	0.4732	8	0.6304	4	0.6271	5	0.4910	6	0.5680	8

根据表 1 可知,1990—1994 年,在所有粮食产量影响因子中,排在前 3 位的为农田有效灌溉面积、受灾面积和农业劳动力,这表明这 3 个为粮食产量主要的影响因子;1995—1999 年,排在前 3 位的变为化肥施用量、粮食单位面积产量和机械总动力,这说明,在这 5 年内,这 3 个影响因子有助于提高粮食产量;2000—2004 年,排在前 3 位的变为粮食作物播种面积、粮食单位面积产量和机械总动力,这说明,在这 5 年之内,粮食产量与这 3 个因子关联度较强;2005—2011 年,农业劳动力、农田有效灌溉面积和化肥施用量主要决定了粮食产量的高低;在过去的整 22 年里,农业劳动力、受灾面积和粮食单位面积产量对粮食产量的影响较显著。因此,本研究选择 22 年来平均关联度比较大的前 3 位因子:农业劳动力、受灾面积、粮食单位面积产量作为主要粮食产量预测模型的影响因子进行建模。

3.4 结果与分析

3.4.1 GM(1,N)建模

将前 1990—2005 年农业劳动力、受灾面积、粮食单位面积产量作为输入,粮食产量作为输出,建立 GM(1,3)的粮食产量预测模型,并以此模型求解 1990—2005 年的粮食产量拟合值,拟合值与实际值的对比如图 2 所示。

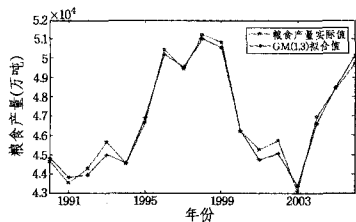


图 2 GM(1,3)对 1990—2005 年粮食产量拟合结果

由图 2 可知,GM(1,3)模型对粮食产量趋势进行拟合,基本上可以揭示粮食产量的宏观发展规律,其平均相对误差为 6.20%,拟合精度达到 93.80%,结果可以接受;但也可以看出,GM(1,3)模型拟合值无法反映粮食产量的波动性,拟合精度和可靠性不高,拟合性能有待进一步提高。

3.4.2 残差预测模型

通过残差序列 $\epsilon_i = (-183.988, -285.128, 305.349, 659.156, -36.642, -244.415, 275.360, -119.613, 200.198, 272.475, -5.450, 543.464, 654.530, -277.385, 325.054, -83.127, -422.07)$,求得马尔可夫状态转移概率矩阵,然后得到 Markov 残差修正的灰色 GM(1,3)预测模型(GMM),GMM 模型对 1990—2005 年粮食产量拟合结果如图 3 所示。

从图 3 可知,灰色理论和马尔可夫相融合预测模型(gmm)的粮食产量拟合结果平均相对误差为 0.37%,拟合精度达到 99.63%,有效提高了粮食产量的拟合精度,拟合结果

表明,本研究提出粮食产量模型是一种有效、拟合精度高的粮食产量预测方法。

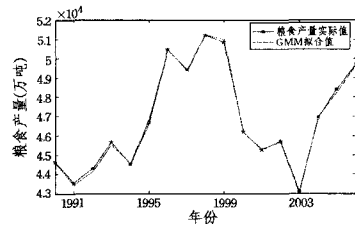


图 3 GMM 对 1990—2005 年粮食产量拟合结果

3.4.3 模型泛化能力检验

评价一个预测模型的好坏,主要考察其预测能力(泛化能力)而非回代拟合结果,因此,分别采用单一 GM(1,3)和马尔可夫模型(Markvo)进行对比实验。为避免单个样本预测结果的偶然性,对连续 5 年粮食产量进行独立预测,即将 2006—2011 年粮食产量作为测试样,以便获得实际粮食产量建模精度与预测能力的评定。同时,为了说明灰色关联分析对粮食产量预测精度提高的有效性,采用未进行粮食产量影响因子筛选的组合模型(GMM1)进行对比实验。几种模型对 2006—2011 年粮食产量预测的结果如表 2 所列。

表 2 各模型对 2006—2011 年粮食产量预测的结果

年份	实际值	GM(1,3)	Markvo	GMM1	GMM
2007	50160.28	47883.93	51699.11	49589.1	50573.38
2008	52870.9	54349.62	53492.59	52666.98	53136.71
2009	53082	52737.73	54790.34	50576.6	53464.71
2010	54641	53568.42	51610.69	55404.6	55491.11
2011	57121	53346.9	54766.2	56702.46	57059.79
RMSE		2139.21	2019.94	1216.80	472.06
MAPE%		3.3107	3.4261	1.6749	0.7421

对表 2 各模型 2006—2011 年粮食产量预测结果进行分析,可以得到如下结论:

(1) 单一灰色模型和马尔可夫模型的预测效果均不理想,主要是因为单一模型只能反映粮食产量变化的片断信息,无法全面、准确描述粮食产量的动态变化规律;相对于单一模型,组合预测模型(GMM 和 GMM1)不仅能揭示粮食产量的宏观规律,而且能够很好地描述粮食产量的非线性波动规律,更好地捕捉粮食产量的走势,粮食产量预测精度和可靠性有了很大提高,避免了单一模型的局限性。

(2) 本文提出的采用灰色关联分析对粮食产量影响因子进行筛选的组合模型(GMM)比传统组合模型(GMM1)的预测精度更高,预测效率更高,主要是因为 GMM 采用灰色关联分析对粮食产量的影响因子进行选择,剔除了一些不利于粮食产量预测结果,并消除了一些信息冗余影响因子,提高了预测精度,减少了粮食产量预测误差。

结束语 粮食产量由于受到多种因素影响,具有较大的

随机性和波动性,本研究利用灰色理论和马尔可夫模型的优点,建立了一种灰色理论和马尔可夫相融合的粮食产量预测模型。仿真实验结果表明,GM提高了粮食产量的预测精度,本研究提出的研究思路还可以对其它既具有趋势性又有波动性的对象进行模拟和预测。

参考文献

[1] 莫旭. 预测方法在粮食行业的应用[D]. 长春: 吉林大学, 2004
 [2] 丁晨芳. 组合模型分析方法在我国粮食产量预测中的应用[J]. 农业现代化研究, 2007, 28(1): 101-103
 [3] 胡晓丽, 袁洪印, 彭占武, 等. 灰色关联分析在吉林省粮食产量预测中的应用[J]. 农业与技术, 2009, 29(4): 133-135
 [4] 苏博, 刘鲁, 杨方廷. GM(1, N)灰色系统与 BP 神经网络方法的粮食产量预测比较研究[J]. 中国农业大学学报, 2006, 11(4): 99-104
 [5] 李秀峰, 袁鹏, 邵骏. 基于 GM 和 BP 网络的年均流量组合预测

模型[J]. 东北水利水电, 2007(2): 31-34

[6] 李炳军, 李秋芳, 卢秀霞. 灰色线性回归组合模型在河南省粮食产量预测中的应用[J]. 河南农业科学, 2009(10): 44-47
 [7] 王秋萍, 闫海霞, 闫建波. Markov 残差修正的灰色 GM(1, N)模型在粮食产量预测中的应用[J]. 西安理工大学学报, 2009, 25(3): 347-350
 [8] 吕佳良, 张振刚. 基于灰色关联指标筛选的 BP 神经网络中长期电力负荷滚动预测马尔可夫残差修正模型研究[J]. 华东电力, 2008, 36(9): 10-14
 [9] 陈子锦, 王福亮, 陆守香. 灰色预测模型 GM(1, 1)的适用性分析及在火灾风险预测中的应用[J]. 中国工程科学, 2007, 9(5): 91-94
 [10] 刘岩, 刘芳. 马尔可夫链在人民币汇率预测中的应用[J]. 中国管理信息化, 2007, 10(3): 68-70
 [11] 张蕊, 夏乐天. 灰色马尔可夫链模型在降雨预测中的应用[J]. 重庆理工大学学报: 自然科学版, 2012, 26(10): 103-106

(上接第 236 页)

步骤 4 根据式(7)、式(8)计算粒子的聚集度。

步骤 5 如果 gd 的值接近 1 但不满足终止准则, 按式(9)通过慢变函数对位置更新公式进行扰动; 否则, 执行步骤 6。

步骤 6 如果达到设定的终止条件则执行步骤 7; 否则转向执行步骤 2。

步骤 7 输出全局最优位置 G_{best} 及其适应度值。

4 仿真实验

为了验证本文提出的求解武器-目标分配问题的改进量子粒子群算法性能, 在 Intel Pentium IV 2.0 GHz 的 CPU, 4GB 内存, Windows XP 平台上, MATLAB 7.0 环境下进行仿真计算。

假设有 6 个来袭目标, T_1, T_2, \dots, T_6 , 各目标的威胁度如表 1 所列。4 种类型武器: W_1, W_2, W_3, W_4 的数目为 $\{2, 1, 2, 1\}$, 防御方对每个来袭目标最多可使用 1 个武器。各类武器对各来袭目标的单发杀伤概率如表 2 所列。

表 1 来袭目标威胁性系数

来袭目标	1	2	3	4	5	6
威胁性系数	1.0	0.9	0.7	1.0	0.5	0.8

表 2 各类武器对不同来袭目标的杀伤概率

武器	来袭目标					
	1	2	3	4	5	6
1	0.5	0.7	0.2	0.5	0.8	0.4
2	0.4	0.1	0.8	0.7	0.6	0.9
3	0.1	0.7	0.3	0.7	0.6	0.8
4	0.8	0.3	0.2	0.8	0.2	0.1

读入表 1、表 2 中的数据。设置最大迭代次数为 200, 运行程序, 算法在第 38 次迭代后找到最优解, 运行结果如表 3 所列。

表 3 改进的量子粒子群算法求解武器目标分配方案

来袭目标编号	1	2	3	4	5	6
武器类型编号	1	2	1	3	4	3

表 3 中的分配方案表示: 第 1 种类型的两个武器分别迎击来袭目标 1 和 3, 第 2 种类型的武器迎击来袭目标 2, 第 3 种类型的两个武器分别迎击来袭目标 4 和 6, 第 4 种类型的武器迎击来袭目标 5。

对基本 PSO 算法与本文所提算法重复执行 50 次得出的最优方案的适应度值情况如表 4 所列。

表 4 最优方案的适应度值情况

算法	最佳值	最差值	平均值
PSO	1.3851	0.8568	1.1547
本文算法	1.5772	1.0246	1.3661

本文算法最优分配方案的适应度函数值为 1.5772, 最佳方案的适应度平均值为 1.3661, 与最优值相差 0.2111; 而基本 PSO 算法进行同样次数独立实验所得最佳方案的适应度平均值为 1.1547, 与最优值相差 0.3304, 可明显看出改进的 QPSO 算法性能大大优于基本 PSO 算法。

结束语 本文构建了多种类型武器目标分配问题数学模型, 并且提出一种求解武器目标分配问题的改进的量子粒子群算法。新算法根据粒子聚集度来判断早熟停滞, 利用慢变函数克服早熟收敛。实验证明, 本文提出的算法同经典的粒子群算法比较能更好地提高武器目标分配效率。本文提出的武器目标分配问题算法, 还需要在实际的系统中进行测试, 在实践中不断完善和改进。

参考文献

[1] 岳海军, 许梅生. 贪心遗传算法解决一般武器-目标分配问题[J]. 火力与指挥控制, 2009, 34(8): 49-55
 [2] 苏森, 钱海, 王煦法. 基于免疫记忆的蚁群算法的 WTA 问题求解[J]. 计算机工程, 2008, 34(4): 215-217
 [3] 肖嵘, 赵成旺, 王护利, 等. 多群协同 PSO 优化算法的 WTA 问题求解[J]. 计算机仿真, 2010, 27(9): 12-15
 [4] Kennedy J, Eberhart R C. Particle swarm optimization[J]. Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1995(11): 1942-1948
 [5] 李欣然, 靳雁霞. 一种求解组卷问题的量子粒子群算法[J]. 计算机系统应用, 2012, 21(7): 244-248
 [6] Sun J, Feng B, Xu W B. Particle swarm optimization with particles having quantum behavior[C]// Proceedings of 2004 Congress on Evolutionary Computation. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2004: 325-331
 [7] 李欣然, 靳雁霞. 量子行为粒子群优化算法在公交调度优化中的应用[J]. 计算机系统应用, 2012, 21(7): 191-195
 [8] 杨义群. 慢变函数的特性[J]. 自然杂志, 1982, 2: 153-154
 [9] 吴文欢, 张少辉, 李巍, 等. 分阶段进化的粒子群优化算法[J]. 重庆理工大学学报: 自然科学版, 2012, 26(6): 67-70