任意公理系统的依赖基

马 垣
(辽宁科技大学软件学院 鞍山 114051)

摘 要 形式化定义了值依赖的公理、公理系统及依赖基。严格证明了任何公理系统对任何背景都具有依赖基,给出了对任意一个公理系统求任意背景依赖基的方法,并证明了每个公理系统的依赖基不唯一。进而还提出了一种诱导背景,通过诱导背景可把这个证明过程及依赖基的计算过程形象地反映出来。

关键词 值依赖,公理系统,依赖基,诱导背景
中图法分类号 TP18 **文献标识码** A

Dependency Basis of Arbitrary Axiomatic System

MA Yuan
(School of Software Engineering,Liaoning University of Science and Technology,Anshan 114051,China)

Abstract This paper defined axiomatic and axiomatic systems of value dependencies formally,and proved that each axiomatic system has dependency basis for any context strictly. It gave a method of computing dependency basis of arbitrary axiomatic system for any context and proved that dependency basis of each axiomatic system is not only. And an inducement context was introduced to visually show the process of the prove and the compute dependency basis using the inducement context.

Keywords Value dependency,Axiomatic system,Dependency basis,Inducement context

1 引言

值依赖是粗糙集理论与形式概念、关系数据库等领域共同研究的课题。在粗糙集理论中,它称为“规则”[1,2],在形式概念中,它称为“属性蕴含”[3,4],在数据库中,它称为“值依赖”[5]。本文采用数据库理论中的名称“值依赖”。文献[6]中已证明在一个信息表中为真的值依赖的个数是随信息表的尺寸而指数级增长的。因此要把它们全部表示出来十分困难,这影响了它们的应用。这样 Guigues 及 Duquenne 提出了目前用他们名字命名的 Guigues-Duquenne 基[7]。证明了这个基对 Armstrong 公理系统(或称推导规则)是完整的、无冗余的。完整是指,所有在该信息表中成立的值依赖都可由这个基中的值依赖用 Armstrong 公理系统推导出来。无冗余是指,这个基中的每个值依赖都不能由这个基中的其它值依赖用 Armstrong 公理系统推导出来。给出对 Armstrong 公理系统完整、无冗余的依赖基是很自然的,因为 Armstrong 公理系统对值依赖是有效、完备的。这里有效是指,从某信息表中成立的一个值依赖的集合出发,用 Armstrong 公理系统推导出的每个值依赖都一定在该信息表中成立。完备是指,在任何信息表中每个与这个值依赖集合同时成立的值依赖都可从这个值依赖集合出发用 Armstrong 公理系统推导出来。由于 Armstrong 公理系统的这种有效完备性,因此多年来人们一直没有考虑是否还有其它的公理系统也能有完整、无冗余的依赖基。人们一直认为只有有效、完备的公理系统才有完整、无冗余的依赖基。然而近年的研究发现,原来还存在另外的公理系统也存在着对这个公理系统的完整、无冗余的依赖基(见文献[9])。这个发现不仅在理论上有很大意义,而且在实践上也有很大意义。因为实际应用的问题是多种多样的,单一的一种依赖基很难方便地满足这些多种多样的需求,例如:在关联规则的挖掘中,我们这里的紧致依赖的依赖基就比 Guigues-Duquenne 基方便得多[8]。

由于发现了在 Armstrong 公理系统以外还有其它公理系统也有依赖基,而且还在实践中有很大意义,因此就产生了一系列的问题:(1)都有哪些公理系统可以有依赖基?一共有多少?(2)能否把它们全部找出来?(3)同一个公理系统的依赖基是否唯一?这些问题的研究显然有重大的理论意义及实际意义。

本文将解决这些问题。首先对公理及依赖基等给出一般性的数理逻辑的形式化定义,然后在此基础上严格地证明以下结论:(1)任何公理系统都具有依赖基;(2)可以有一种方法把它们都求出来;(3)每个公理系统对应的依赖基不唯一。从而解决了这个具有重大的理论意义及实际意义的问题。

为此本文还提出了一种诱导背景。通过这种诱导背景可以把以上结论的证明过程及依赖基的计算过程形象地反映出来。

本文第 2 节是基本定义与基本原理;第 3 节是公理与公理系统;第 4 节是诱导背景;第 5 节给出各种公理系统依赖基的实例;最后是结论。

到稿日期:2012-04-27 返修日期:2012-07-25 本文受国家自然科学基金(61074130)资助。
马 垣(1941—),男,教授,硕士生导师,主要研究领域为 Rough 集理论、知识发现、数据库理论、形式概念分析,E-mail:mayuanas@sina.com.cn。

Guigues-Duquenne 基及“紧致依赖”的依赖基都是用形式概念的术语来叙述的，因此本文也延用形式概念的术语来叙述。

2 基本定义与基本原理

定义 1[8] 设$\mathbb{K}=(U,M,I)$是一个形式背景，其中U是对象的有限集合，M是属性的有限集合，$I\subseteq U\times M$是U与M间的关系。若$A\subseteq U$，$B\subseteq M$，令：

$f(A)=\{m\in M|\ \forall u\in A,(u,m)\in I\}$

$g(B)=\{u\in U|\ \forall m\in B,(u,m)\in I\}$

如果$f(A)=B$，$g(B)=A$，则称(A,B)是一个形式概念，简称概念。A是这个概念的外延，B是这个概念的内涵。$\mathbb{K}$的全部概念的集合记作$\mathscr{B}(\mathbb{K})$。若(A_1,B_1)，$(A_2,B_2)\in\mathscr{B}(\mathbb{K})$且$A_1\subseteq A_2$（此时必有$B_2\subseteq B_1$），则称$(A_1,B_1)$是$(A_2,B_2)$的子概念，$(A_2,B_2)$是$(A_1,B_1)$的父概念。若$A_1\subset A_2$且不存在概念$(A_3,B_3)$使得$A_1\subset A_3\subset A_2$，则称$(A_1,B_1)$是$(A_2,B_2)$的直接子概念。$(A_2,B_2)$是$(A_1,B_1)$的直接父概念。

引理 1[8] 设$\mathbb{K}=(U,M,I)$是一个形式背景，$A_1,A_2\subseteq U$，$B_1,B_2\subseteq M$，于是

(1)$A_1\subseteq A_2$ 则 $f(A_1)\supseteq f(A_2)$

(2)$B_1\subseteq B_2$ 则 $g(B_1)\supseteq g(B_2)$

(3)$f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cap f(A_2)$

(4)$g(B_1\cup B_2)=g(B_1)\cap g(B_2)$

(5)$A_1\subseteq g(f(A_1))$

(6)$B_1\subseteq f(g(B_1))$

(7)$f(A_1)=f(g(f(A_1)))$

(8)$g(B_1)=g(f(g(B_1)))$

定义 2 设$\mathbb{K}=(U,M,I)$是一个背景，形如$A\to B$的表达式称为是一个值依赖，这里$A,B\subseteq M$。如果$g(A)\subseteq g(B)$，则称$A\to B$对于$\mathbb{K}$为真（或称在$\mathbb{K}$中为真），否则为假。

例 1 设$\mathbb{K}=(U,M,I)$是如表 1 所列的一个背景，则$a\to d$，$b\to d$，$ab\to d$，$bc\to d$等都对于$\mathbb{K}$为真，而$a\to b$，$b\to c$，$ab\to c$，$c\to d$等都对于$\mathbb{K}$为假。

表 1 一个形式背景

	a	b	c	d
1	×	×		×
2		×	×	×
3	×		×	×
4			×	

3 公理与公理系统

定义 3 设M是属性集合，X,Y等是代表M子集的变量，则称“$X\subseteq Y$”为第 1 类原子，称“$X\to Y$”为第 2 类原子，通称原子。若$S_1,S_2,\cdots,S_k,S_0$都是原子，而S_0是第 2 类原子，则称$S_1\wedge S_2\wedge\cdots\wedge S_k\Rightarrow S_0$为一个$M$上的公式，当$M$很明显时也简称为公式，称$S_1\wedge S_2\wedge\cdots\wedge S_k$为左部，$S_0$为右部，这里$\wedge$是“逻辑与”，$\Rightarrow$是“逻辑蕴含”。

例 2 若X,Y,Z,W是变量，则$(X\supseteq Z)\wedge(Z\to W)\wedge(W\supseteq Y)\Rightarrow(X\to Y)$是一个公式。若$X,Y,Z$是变量，则$(X\to Y)\wedge(Y\to Z)\Rightarrow(X\to Z)$也是一个公式。若$X,Y$是变量，则$(X\to Y)\Rightarrow(Y\to X)$也是一个公式。

定义 4 设$\mathbb{K}=(U,M,I)$是一个背景，$S_1\wedge S_2\wedge\cdots\wedge S_k\Rightarrow S_0$是$M$上的一个公式，将公式中的变量$X,Y,\cdots$都分别用$M$的真实子集$A,B,\cdots$等代入，其结果称为该公式的一个实例。

注意到，由于公式中的字符只是变量，因此公式没有真假值，但公式的任一个实例都有真假值，而且由于公式中含有第 2 类原子，因此实例的真假值与背景有关。

例 3 设$\mathbb{K}=(U,M,I)$是如表 1 所列的一个背景，考虑公式

$(X\subseteq Z)\wedge(Z\to W)\wedge(W\supseteq Y)\Rightarrow(X\to Y)$

将M的真实子集$A=\{b\}$，$B=\{d\}$，$C=\{b,c\}$，$D=\{d\}$分别代入公式中的X,Y,Z,W，则得到该公式的一个实例：

$(\{b\}\subseteq\{b,c\})\wedge(\{b,c\}\to\{d\})\wedge(\{d\}\supseteq\{d\})\Rightarrow(\{b\}\to\{d\})$

由于$(\{b\}\subseteq\{b,c\})$是真，$(\{d\}\supseteq\{d\})$是真，而对于这个背景，$g(b,c)=\{2\}$是$g(d)=\{1,2,3\}$的子集，因此$(\{b,c\}\to\{d\})$是真，又因$g(b)=\{1,2\}$是$g(d)=\{1,2,3\}$的子集，所以$(\{b\}\to\{d\})$也是真，因而这个实例为真。

若分别用$A=\{b\}$，$B=\{c\}$，$C=\{b,c\}$，$D=\{c\}$代入上式中的X,Y,Z,W，则得到该公式的另一个实例

$(\{b\}\subseteq\{b,c\})\wedge(\{b,c\}\to\{c\})\wedge(\{c\}\supseteq\{c\})\Rightarrow(\{b\}\to\{c\})$

由于$(\{b\}\subseteq\{b,c\})$是真，$(\{c\}\supseteq\{c\})$是真，$g(b,c)=\{2\}$是$g(c)=\{2,3,4\}$的子集，因此$(\{b,c\}\to\{c\})$也是真，这样左部$(\{b\}\subseteq\{b,c\})\wedge(\{b,c\}\to\{c\})\wedge(\{c\}\supseteq\{c\})$是真，但是由于$g(b)=\{1,2\}$不是$g(c)=\{2,3,4\}$的子集，因此右部$(\{b\}\to\{c\})$是假，所以该蕴含式是假，即这个实例为假。

定义 5 设M是属性的集合，$S_1\wedge S_2\wedge\cdots\wedge S_k\Rightarrow S_0$是$M$上的公式，如果对任何一个背景，该公式的任何一个实例都为真，则称这个公式为M上的公理，简称为公理。

例 4 M上的公式$(X\to Z)\wedge(Z\supseteq Y)\Rightarrow(X\to Y)$是$M$上的公理，这是因为若$\mathbb{K}=(U,M,I)$是任一个背景，$A,B,C$是$M$的 3 个任意子集，将它们分别代入公式中的$X,Y,Z$，得到实例$(A\to C)\wedge(C\supseteq B)\Rightarrow(A\to B)$。则不论背景$\mathbb{K}=(U,M,I)$中的$U,I$如何，也不论$A,B,C$是$M$的怎样的子集，这时只能有两种情况：(1) 实例中的左部$(A\to C)\wedge(C\supseteq B)$为假，(2) 实例中的左部$(A\to C)\wedge(C\supseteq B)$为真。对于第(1)种情况，蕴含式$(A\to C)\wedge(C\supseteq B)\Rightarrow(A\to B)$为真。对于第(2)种情况，必然是$(A\to C)$与$(C\supseteq B)$同时为真。由$(A\to C)$为真，我们知$g(A)\subseteq g(C)$，再由$(C\supseteq B)$为真及引理 1(2)知这时$g(C)\subseteq g(B)$，于是$g(A)\subseteq g(B)$，从而$(A\to B)$为真。这样第(2)种情况时，蕴含式$(A\to C)\wedge(C\supseteq B)\Rightarrow(A\to B)$也为真。由此我们知不论背景$\mathbb{K}=(U,M,I)$中的$U$与$I$如何，不论$A,B,C$是$M$的怎样的子集，蕴含式$(A\to C)\wedge(C\supseteq B)\Rightarrow(A\to B)$一定是为真，所以$(X\to Z)\wedge(Z\supseteq Y)\Rightarrow(X\to Y)$是$M$上的公理。由于这里对$M$并没有特殊的要求，$M$的存在是很明显的，因此简称公理。

公理有很多，定理 1 中给出的是一些常用的公理。

定理 1 下面的公式都是公理：

(1) $(X\supseteq Y)\Rightarrow(X\to Y)$

(2) $(X\to Y)\wedge(Y\to Z)\Rightarrow(X\to Z)$

(3) $(X\to Y)\Rightarrow(X\cup Z\to Y\cup Z)$

(4) $(X\supseteq Z)\wedge(Z\to W)\wedge(W\supseteq Y)\Rightarrow(X\to Y)$

(5) $(X\to Y)\wedge(X\to Z)\Rightarrow(X\to Y\cup Z)$

证明：首先注意到蕴含式左部为假，蕴含式一定为真，所以我们只要证明左部为真时，右部一定为真，即可以证明蕴含式一定为真了。其次再注意到引理 1 对任何背景都正确，所以不受背景限制，任何时候都可引用。

现用任意集合 A,B,C,D 分别代入 X,Y,Z,W，则上面 5 个蕴含式对任何背景的任何实例都一定为真的证明如下：

(1) 若 $(A\supseteq B)$ 为真，则由引理 1(2) 知 $g(A)\subseteq g(B)$，所以 $(A\rightarrow B)$ 为真。

(2) 若 $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)$ 为真，则 $g(A)\subseteq g(B)$，$g(B)\subseteq g(C)$，因此 $g(A)\subseteq g(C)$，所以 $(A\rightarrow C)$ 为真。

(3) 若 $(A\rightarrow B)$ 为真，则 $g(A)\subseteq g(B)$。由引理 1(4) 知 $g(A\cup C)=g(A)\cap g(C)$，$g(B\cup C)=g(B)\cap g(C)$，于是 $g(A\cup C)\subseteq g(B\cup C)$，所以 $(A\cup C\rightarrow B\cup C)$ 为真。

(4) 若 $(A\supseteq C)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(D\supseteq B)$ 为真，则由 $(A\supseteq C)$，$(D\supseteq B)$ 及引理 1(2) 知 $g(A)\subseteq g(C)$ 及 $g(D)\subseteq g(B)$，再由 $(C\rightarrow D)$ 为真知 $g(C)\subseteq g(D)$，于是 $g(A)\subseteq g(B)$，所以 $(A\rightarrow B)$ 为真。

(5) 若 $(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow C)$ 为真，则 $g(A)\subseteq g(B)$ 及 $g(A)\subseteq g(C)$，于是 $g(A)\subseteq g(B)\cap g(C)$，由引理 1(4) 知 $g(B)\cap g(C)=g(B\cup C)$，因此 $g(A)\subseteq g(B\cup C)$，所以 $(A\rightarrow B\cup C)$ 为真。

定义 6 设 M 是属性的集合，$S_1\wedge S_2\wedge\cdots\wedge S_k\Rightarrow S_0$ 是一个公理，若该公理某个实例的左部对于背景 $\mathbb{K}=(U,M,I)$ 为真，则称这个实例的左部可根据该公理推出这个实例的右部。

例 5 设背景 $\mathbb{K}$ 如表 1 所列，由定理 1(3) 知 $(X\rightarrow Y)\Rightarrow(X\cup Z\rightarrow Y\cup Z)$ 是一个公理。而

$(\{b\}\rightarrow\{d\})\Rightarrow(\{b\}\cup\{c\}\rightarrow\{d\}\cup\{c\})$，即 $(\{b\}\rightarrow\{d\})\Rightarrow(\{b,c\}\rightarrow\{d,c\})$ 是它的一个实例，由于左部 $(\{b\}\rightarrow\{d\})$ 对于背景 $\mathbb{K}$ 为真，因此我们称对于背景 $\mathbb{K}$，$(\{b\}\rightarrow\{d\})$ 根据公理 $(X\rightarrow Y)\Rightarrow(X\cup Z\rightarrow Y\cup Z)$ 推出了 $(\{b,c\}\rightarrow\{d,c\})$。

另外 $(\{a\}\rightarrow\{c\})\Rightarrow(\{a\}\cup\{b\}\rightarrow\{c\}\cup\{b\})$ 即 $(\{a\}\rightarrow\{c\})\Rightarrow(\{a,b\}\rightarrow\{c,b\})$ 也是该公理的一个实例，但由于左部 $(\{a\}\rightarrow\{c\})$ 对于背景 $\mathbb{K}$ 不为真，因此我们不能说对于背景 $\mathbb{K}$，$(\{a\}\rightarrow\{c\})$ 根据该公理推出了 $(\{b,c\}\rightarrow\{d,c\})$。请注意到这时整个蕴含式 $(\{a\}\rightarrow\{c\})\Rightarrow(\{a\}\cup\{b\}\rightarrow\{c\}\cup\{b\})$ 仍然是真（由于 $(\{a\}\rightarrow\{c\})$ 是假）。实际上由于 $(X\rightarrow Y)\Rightarrow(X\cup Z\rightarrow Y\cup Z)$ 是公理，因此它的任何实例都是真。但只有左部为真时才能称根据此公理由左部推出了右部。

定义 7 $\mathfrak{A}$ 是一些公理的集合，则称 $\mathfrak{A}$ 为一个公理系统。

例 6 由定理 1 知：

$$\{(X\subseteq Y)\Rightarrow(X\rightarrow Y),(X\rightarrow Y)\wedge(Y\rightarrow Z)\Rightarrow(X\rightarrow Z),(X\rightarrow Y)\Rightarrow(X\cup Z\rightarrow Y\cup Z)\}$$

是公理系统。实际它就是 Armstrong 公理系统。再由定理 1 知以下集合：

$$\{(X\supseteq Z)\wedge(Z\rightarrow W)\wedge(W\supseteq Y)\Rightarrow(X\rightarrow Y)\}$$

也是公理系统。实际它就是紧致依赖涉及的公理系统[9]。

定义 8 设 M 是属性的集合，$\mathfrak{A}$ 是公理系统，$\mathbb{K}=(U,M,I)$ 是一个背景，$\mathfrak{S}$ 是一些 $\mathbb{K}$ 上为真的值依赖的集合，$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 是 M 上的一个值依赖序列，其中每个 σ_k 或者属于 $\mathfrak{S}$，或者可从 $\mathfrak{A}$ 中某个公理推出，而且这时右部的所有第 2 类原子全都只是集合 $\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{k-1}\}$ 中的元素，则称 σ_n 可由 $\mathfrak{S}$ 中的值依赖，根据 $\mathfrak{A}$ 推出。如果在 $\mathbb{K}$ 上为真的值依赖，都可由 $\mathfrak{S}$ 中的值依赖，根据 $\mathfrak{A}$ 推出，则称 $\mathfrak{S}$ 是完全的。如果 $\mathfrak{S}$ 中的每个值依赖 σ，都不能由 $\mathfrak{S}$ 中的其它值依赖（即 $\mathfrak{S}-\{\sigma\}$ 中的值依赖），根据 $\mathfrak{A}$ 推出，则称 $\mathfrak{S}$ 是无冗余的。如果 $\mathfrak{S}$ 既是完全的又是无冗余的，则称 $\mathfrak{S}$ 为公理系统 $\mathfrak{A}$ 对背景 $\mathbb{K}$ 的依赖基。

4 诱导背景

引理 2 设 $\mathbb{K}=(U,M,I)$ 是一个背景，则对 $\mathbb{K}$ 为真的全部值依赖的集合是

$\{A\rightarrow B\mid A\subseteq M,B\subseteq f(g(A))\}$

证明：我们只要证明 $A\rightarrow B$ 对 $\mathbb{K}$ 为真是当且仅当 $B\subseteq f(g(A))$ 即可。

（当）若 $B\subseteq f(g(A))$，则 $g(B)\supseteq g(f(g(A)))$，而 $g(f(g(A)))=g(A)$，所以 $g(B)\supseteq g(A)$，$A\rightarrow B$ 对 $\mathbb{K}$ 为真。

（仅当）若 $A\rightarrow B$ 对 $\mathbb{K}$ 为真，则 $g(B)\supseteq g(A)$，于是 $f(g(B))\subseteq f(g(A))$。然而 $B\subseteq f(g(B))$，所以 $B\subseteq f(g(A))$。

由引理 2 可知，对 $\mathbb{K}=(U,M,I)$ 为真的所有值依赖的集合可以这样来构成，按任一个次序，依次取 M 的每一个子集 A，求 $f(g(A))$，则 $f(g(A))$ 的每个子集 B，$A\rightarrow B$ 都是这个集合的一个元素，而所有这些元素就组成了对 $\mathbb{K}$ 为真的所有值依赖的集合。

定理 2 每一个公理系统 $\mathfrak{A}$，对每一个背景 $\mathbb{K}=(U,M,I)$ 都存在依赖基。

证明：设 $\mathfrak{S}_1=\{A\rightarrow B\mid A\subseteq M,B\subseteq f(g(A))\}$。由引理 2 知 $\mathfrak{S}_1$ 是对 $\mathbb{K}$ 为真的所有值依赖的集合。显然只有两种可能：

1. $\mathfrak{S}_1$ 中的每个值依赖都不能由 $\mathfrak{S}_1$ 中的其它值依赖根据 $\mathfrak{A}$ 推出；

2. $\mathfrak{S}_1$ 中至少有某个值依赖 $A_1\rightarrow B_1$ 能根据 $\mathfrak{A}$ 由 $\mathfrak{S}_1$ 中的其它值依赖推出。

对于第 2 种情况我们令 $\mathfrak{S}_2=\mathfrak{S}_1-\{A_1\rightarrow B_1\}$，并对 $\mathfrak{S}_2$ 进行考察。对 $\mathfrak{S}_2$ 也只有两种可能：

1. $\mathfrak{S}_2$ 中的每个值依赖都不能由 $\mathfrak{S}_2$ 中的其它值依赖根据 $\mathfrak{A}$ 推出；

2. $\mathfrak{S}_2$ 中有某个值依赖 $A_2\rightarrow B_2$ 能根据 $\mathfrak{A}$ 由 $\mathfrak{S}_2$ 中的其它值依赖推出。

对于第 2 种情况我们令 $\mathfrak{S}_3=\mathfrak{S}_2-\{A_2\rightarrow B_2\}$，并对 $\mathfrak{S}_3$ 进行考察。对 $\mathfrak{S}_3$ 也只有两种可能：

1. $\mathfrak{S}_3$ 中的每个值依赖都不能由 $\mathfrak{S}_3$ 中的其它值依赖根据 $\mathfrak{A}$ 推出；

2. $\mathfrak{S}_3$ 中有某个值依赖 $A_3\rightarrow B_3$ 能根据 $\mathfrak{A}$ 由 $\mathfrak{S}_3$ 中的其它值依赖推出。

对于第 2 种情况我们令 $\mathfrak{S}_4=\mathfrak{S}_3-\{A_3\rightarrow B_3\}$，并对 $\mathfrak{S}_4$ 进行考察。

如此下去，由于 M 是有限的，因此 $\mathbb{K}$ 上为真的所有值依赖的集合都是有限的，于是总会存在一个 $i\geqslant 1$ 使 $\mathfrak{S}_i$ 中的每个值依赖都不能由 $\mathfrak{S}_i$ 中的其它值依赖根据 $\mathfrak{A}$ 推出。显然这个 $\mathfrak{S}_i$ 是无冗余的，下面再证明它是完全的。用归纳法证明得到 $\mathfrak{S}_i$ 以前的每个 $\mathfrak{S}_j\,(1\leqslant j\leqslant i)$ 都是完全的。首先 $j=1$ 正确，因为 $\mathfrak{S}_1$ 本身就是对 $\mathbb{K}$ 为真的所有值依赖的集合。其次设 $j=k$ 正确，即对 $\mathbb{K}$ 为真的所有值依赖都可由 $\mathfrak{S}_k$ 中的值依

赖根据$\mathfrak{A}$推出，那么由于$\mathfrak{S}_{k+1}=\mathfrak{S}_k-\{A_k\to B_k\}$，而$A_k\to B_k$能根据$\mathfrak{A}$由$\mathfrak{S}_k$中的其它值依赖推出，即由$\mathfrak{S}_{k+1}=\mathfrak{S}_k-\{A_k\to B_k\}$中的值依赖推出，于是$\mathfrak{S}_{k+1}$可推出$A_k\to B_k$，又因为$\mathfrak{S}_{k+1}$中的每个都可平凡地由$\mathfrak{S}_{k+1}$推出，所以$\mathfrak{S}_{k+1}$可推出$\mathfrak{S}_k=\mathfrak{S}_{k+1}\cup\{A_k\to B_k\}$，再因对$\mathbb{K}$为真的所有值依赖都可由$\mathfrak{S}_k$中的值依赖根据$\mathfrak{A}$推出，所以$\mathbb{K}$上为真的所有值依赖都可由$\mathfrak{S}_{k+1}$中的值依赖根据$\mathfrak{A}$推出。这样由归纳法知$\mathbb{K}$上为真的所有值依赖都可由$\mathfrak{S}_i$中的值依赖根据$\mathfrak{A}$推出，于是$\mathfrak{S}_i$是完全的。$\mathfrak{S}_i$既是无冗余的又是完全的，所以是依赖基。

由于每次在$\mathfrak{S}_k$中可能有不止一个$A_k\to B_k$能根据$\mathfrak{A}$由$\mathfrak{S}_k$中的其它值依赖推出，因此选择不同的$A_k\to B_k$来形成$\mathfrak{S}_{k+1}=\mathfrak{S}_k-\{A_k\to B_k\}$将会得到不同的依赖基，即同一个公理系统可能会有多种不同的依赖基(见例8及例11)。

这个定理的证明实际是给出了对于一个公理系统$\mathfrak{A}$，背景$\mathbb{K}$的依赖基的一种求法。为了更方便地看出这个算法的计算过程，我们定义一种诱导背景。

定义9 设$\mathbb{K}=(U,M,I)$是一个背景，令$\mathbb{K}'=(2^M,2^M,J)$，其中J是2^M上的关系，满足当且仅当$A\to B$对$\mathbb{K}$为真时，$(A,B)\in J$。则称$\mathbb{K}'$是$\mathbb{K}$的诱导背景。

根据引理2，可以这样来构造诱导背景$\mathbb{K}'$。对于M的每个子集A，首先求出$f(g(A))$，并且$(A,f(g(A)))$就是$\mathbb{K}'$中A行最右的元素，然后对$f(g(A))$的每个子集B，都形成(A,B)，它们将是$\mathbb{K}'$中A行的全部元素。

例7 设背景$\mathbb{K}=(U,M,I)$如表1所列，这时$2^M=\{\emptyset,a,b,ab,c,ac,bc,abc,d,ad,bd,abd,cd,acd,bcd,abcd\}$，这里用$ab$表示集合$\{a,b\}$，余同。由于

$f(g(\emptyset))=\emptyset$，所以$\mathbb{K}'$中的$\emptyset$行只有元素$(\emptyset,\emptyset)$；

$f(g(a))=ad$，所以$\mathbb{K}'$中的a行有最右元素(a,ad)及元素$(a,\emptyset)$，(a,a)，(a,d)；

$f(g(b))=bd$，所以$\mathbb{K}'$中的b行有最右元素(b,bd)及元素$(b,\emptyset)$，(b,b)，(b,d)；

$f(g(ab))=abd$，所以$\mathbb{K}'$中的ab行有最右元素(ab,abd)及元素$(ab,\emptyset)$，(ab,a)，(ab,b)，(ab,ab)，(ab,d)，(ab,ad)，(ab,bd)；

$f(g(c))=c$，所以$\mathbb{K}'$中的c行有最左元素(c,c)及元素$(c,\emptyset)$。同理处理其它各行，最终得到的诱导背景$\mathbb{K}'$如表2所列。

表2 一个诱导背景

	Ø	a	b	ab	c	ac	bc	abc	d	ad	bd	abd	cd	acd	bcd	abcd
Ø	×															
a	×	×							×	×						
b	×		×						×		×					
ab	×	×	×	×					×	×	×	×				
c	×				×											
ac	×	×			×	×			×	×			×	×		
bc	×			×	×		×		×		×		×		×	
abc	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
d	×								×							
ad	×	×							×	×						
bd	×		×						×		×					
abd	×	×	×	×					×	×	×	×				
cd	×				×				×				×			
acd	×	×			×	×			×	×			×	×		
bcd	×		×		×		×		×		×		×		×	
abcd	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

由于$\mathbb{K}'$中有元素(A,B)是当且仅当$A\to B$对$\mathbb{K}$为真，因此我们不再区分$\mathbb{K}'$中的元素(A,B)与在$\mathbb{K}$上为真的值依赖$A\to B$。例如，可将$(A\to B)\wedge(B\to C)\Rightarrow(A\to C)$写作$(A,B)\wedge(B,C)\Rightarrow(A,C)$。再如可以说定理1中的$\mathfrak{S}_1$就是$\mathbb{K}'$中的全部元素。

5 各种公理系统依赖基的实例

虽然定理2的证明中给出了对任意公理系统、任意背景、求依赖基的一般方法，从而证明了任意公理系统对任何背景都有依赖基，但对于某些特定的公理系统有一些具体的求法，下面给出几个有代表性的公理系统按定理2的步骤求依赖基的具体过程。显然这些实例也进一步验证了任何公理系统对任何背景都有依赖基这个结论的正确性。

例8 设背景$\mathbb{K}=(U,M,I)$，如表1所列，$\mathfrak{A}=\{(X\to Y)\wedge(Y\to Z)\Rightarrow(X\to Z)\}$，即公理系统只包含一个公理$(X\to Y)\wedge(Y\to Z)\Rightarrow(X\to Z)$，求$\mathbb{K}$关于$\mathfrak{A}$的依赖基。首先做出诱导背景$\mathbb{K}'$，如表2所列。

我们依次考察$\mathbb{K}'$的各行。$\emptyset$行有元素$(\emptyset,\emptyset)$，如果$(\emptyset,\emptyset)$可用这个公理推出，则$X=\emptyset,Z=\emptyset$，而X行(即$\emptyset$行)只有元素$(\emptyset,\emptyset)$，于是Y只能是$\emptyset$，从而推导只能是$(\emptyset,\emptyset)\wedge(\emptyset,\emptyset)\Rightarrow(\emptyset,\emptyset)$，显然这里的$(\emptyset,\emptyset)$不是由"其它值依赖"推出的，所以不能通过删去$(\emptyset,\emptyset)$来形成$\mathfrak{S}_2$。再考察$a$行，$a$行有$(a,\emptyset)$，$(a,a)$，$(a,d)$，$(a,ad)$ 4个元素。对于$(a,\emptyset)$，如果$(a,\emptyset)$可用这个公理推出，则$X=a,Z=\emptyset$，而由X行(即a行)有元素$(a,\emptyset)$，(a,a)，(a,d)，(a,ad)，所以可以作为Y的只能是$\emptyset,a,d,ad$，而它们形成的推导是$(a,\emptyset)\wedge(\emptyset,\emptyset)\Rightarrow(a,\emptyset)$，$(a,a)\wedge(a,\emptyset)\Rightarrow(a,\emptyset)$，$(a,d)\wedge(d,\emptyset)\Rightarrow(a,\emptyset)$，以及$(a,ad)\wedge(ad,\emptyset)\Rightarrow(a,\emptyset)$，前两个蕴含式的左部都有$(a,\emptyset)$，因而对于前两个蕴含式不能说$(a,\emptyset)$是由"其它值依赖"推出的，但后两个蕴含式的左部都没有$(a,\emptyset)$，因而可以说$(a,\emptyset)$是由"其它值依赖"推出的，由于存在着$(a,\emptyset)$可由"其它值依赖"推出的情况，因此可删去a行的$(a,\emptyset)$，而得到$\mathfrak{S}_2$。再考虑(a,a)，如果(a,a)可用这个公理推出，则$X=a,Z=a$，而在$\mathfrak{S}_2$中X行(即a行)还有元素(a,a)，(a,d)，(a,ad)(请注意到在$\mathfrak{S}_2$中已没有$(a,\emptyset)$)，所以可以作为Y的只能是a,d,ad，分别用a,d,ad作为Y，它们形成的推导分别是$(a,a)\wedge(a,a)\Rightarrow(a,a)$，$(a,d)\wedge(d,a)\Rightarrow(a,a)$，以及$(a,ad)\wedge(ad,a)\Rightarrow(a,a)$，第1个蕴含式的左部有$(a,a)$，因而对于第一个蕴含式不能说$(a,a)$是由"其它值依赖"推出的，但后两个蕴含式的左部都没有(a,a)，因而可以说(a,a)是由"其它值依赖"推出的，由于存在着(a,a)可由"其它值依赖"推出的情况，因此可在$\mathfrak{S}_2$中删去a行的(a,a)，而得到$\mathfrak{S}_3$。再考虑(a,d)，如果(a,d)可用这个公理推出，则$X=a,Z=d$，而由$\mathfrak{S}_3$中a行的情况看，可以作为Y的只可以是d,ad(请注意到在$\mathfrak{S}_3$中已没有$(a,\emptyset)$及(a,a))，分别用d,ad作为Y，它们形成的推导分别是$(a,d)\wedge(d,d)\Rightarrow(a,d)$以及$(a,ad)\wedge(ad,d)\Rightarrow(a,d)$，第1个蕴含式的左部有$(a,d)$，因而对于第一个蕴含式不能说$(a,d)$是由"其它值依赖"推出的，但第2个蕴含式的左部没有(a,d)，因而可以说(a,d)是由"其它值依赖"推出的，由于存在着(a,d)可由"其它值依赖"推出的推导，因此可在$\mathfrak{S}_3$中删去a行的(a,d)，而得到$\mathfrak{S}_4$。再考虑(a,ad)，如果(a,ad)可用这个公理推出，则$X=a,Z=ad$，而由$\mathfrak{S}_4$中X行

(即 a 行)的情况看,可以作为 Y 的只有 ad(请注意到在$\mathfrak{S}_4$ 中已没有$(a,\emptyset)$,(a,a)及(a,d)),用 ad 作为 Y,形成的推导是$(a,ad)\wedge(ad,ad)\Rightarrow(a,ad)$,该蕴含式的左部有$(a,ad)$,因而不能说$(a,ad)$是由“其它值依赖”推出的,于是不能在$\mathfrak{S}_4$ 中删除(a,ad)来形成$\mathfrak{S}_5$。这样在$\mathfrak{S}_4$ 中 $\emptyset$ 行剩$(\emptyset,\emptyset)$,a 行剩(a,ad)。下面再考察 b 行。与上面类似,我们可知 b 行将删去$(b,\emptyset)$形成$\mathfrak{S}_5$,再删去(b,b)形成$\mathfrak{S}_6$,再删去(b,d)形成$\mathfrak{S}_7$,由于不能在$\mathfrak{S}_7$ 中删除(b,ad)而形成$\mathfrak{S}_8$,于是$\mathfrak{S}_7$ 中 $\emptyset$ 行剩$(\emptyset,\emptyset)$,a 行剩(a,ad),b 行剩(b,bd)。如此下去,最终剩下的值依赖是:$\emptyset\to\emptyset$,$a\to ad$,$b\to bd$,$ab\to abd$,$c\to\emptyset$,$c\to c$,$ac\to acd$,$bc\to bcd$,$abc\to abcd$,$d\to\emptyset$,$d\to d$,$ad\to a$,$ad\to d$,$bd\to b$,$bd\to d$,$abd\to a$,$abd\to b$,$abd\to ab$,$abd\to d$,$cd\to c$,$cd\to d$,$cd\to cd$,$acd\to a$,$acd\to ac$,$acd\to cd$,$bcd\to bc$,$bcd\to bd$,$bcd\to cd$,$abcd\to a$,$abcd\to b$,$abcd\to ab$,$abcd\to c$,$abcd\to ca$,$abcd\to cb$,$abcd\to abc$,$abcd\to d$,$abcd\to cd$,如表 3 所列。这些就是背景$\mathbb{K}$对于公理系统$\mathfrak{A}$ 的依赖基。容易验证它们中的每一个都不能用其它值依赖推出,而在$\mathbb{K}$ 中为真的所有值依赖都可由它们用公理系统$\mathfrak{A}$ 中的公理推出。

表 3　一个特定的公理系统的依赖基

	Ø	a	b	ab	c	ac	bc	abc	d	ad	bd	abd	cd	acd	bcd	abcd
Ø	×															
a										×						
b											×					
ab												×				
c	×				×											
ac														×		
bc															×	
abc																×
d	×								×							
ad		×							×							
bd			×						×							
abd		×	×	×					×							
cd					×				×				×			
acd		×				×							×			
bcd							×				×		×			
abcd		×	×	×	×	×	×	×	×				×			

如果先考虑最下面的 $abcd$ 行,然后逐行向上考虑,则得到背景$\mathbb{K}$ 对于公理系统$\mathfrak{A}$ 的另一个依赖基。$abcd\to abc$,$bcd\to bc$,$acd\to ac$,$cd\to c$,$cd\to d$,$cd\to cd$,$abd\to ab$,$bd\to b$,$ad\to a$,$d\to\emptyset$,$d\to d$,$abc\to ab$,$abc\to ac$,$abc\to bc$,$abc\to abcd$,$bc\to b$,$bc\to c$,$bc\to cd$,$bc\to bcd$,$ac\to a$,$ac\to c$,$ac\to cd$,$ac\to acd$,$c\to\emptyset$,$c\to c$,$ab\to a$,$ab\to b$,$ab\to abd$,$b\to d$,$b\to bd$,$a\to d$,$a\to ad$,$\emptyset\to\emptyset$,容易验证它们中的每一个也都不能用其它值依赖推出,而在$\mathbb{K}$ 中为真的所有值依赖也都可由它们用公理系统$\mathfrak{A}$ 中的公理推出。由此看出背景$\mathbb{K}$ 对于公理系统$\mathfrak{A}$ 的依赖基不唯一。

例 9　设背景$\mathbb{K}=(U,M,I)$,如表 1 所列,公理系统只包含一个公理,即

$$(X\supseteq Z)\wedge(Z\to W)\wedge(W\supseteq Y)\Rightarrow(X\to Y)$$

求$\mathbb{K}$ 关于$\mathfrak{A}$ 的依赖基。首先做出诱导背景$\mathbb{K}'$,如表 2 所列。在$\mathbb{K}'$中我们考虑 A 行,由于 A 行的最右元素是$(A,f(g(A)))$,而其它元素(A,B)都满足 $f(g(A))\supset B$(见例 1),因此可以通过在这个公理中令 $X=A$,$Z=A$,$W=f(g(A))$,$Y=B$ 来得到实例

$$(A\supseteq A)\wedge(A\to f(g(A)))\wedge(f(g(A))\supseteq B)\Rightarrow(A\to B)$$

由于 $A\supseteq A$ 及 $f(g(A))\supseteq B$ 都为真,而$(A,f(g(A)))$及(A,B)都是$\mathbb{K}'$中的元素,因此$(A\to f(g(A)))$及$(A\to B)$也都为真,因而这个实例为真,所以这些$(A\to B)$都可被推出,这样每行除最右元素外全可删掉。于是形成表 4。再考虑 B 列,若(A,B),(C,B)是表 4 中还剩留的 B 列的任两个元素,而 $A\subset C$,则可以在这个公理中令 $X=C$,$Z=A$,$W=B$,$Y=B$ 来得到实例

$$(C\supseteq A)\wedge(A\to B)\wedge(B\supseteq B)\Rightarrow(C\to B)$$

表 4　将表 2 每行除最右元素外全删掉后形成的背景

	Ø	a	b	ab	c	ac	bc	abc	d	ad	bd	abd	cd	acd	bcd	abcd
Ø	×															
a										×						
b											×					
ab												×				
c					×											
ac														×		
bc															×	
abc																×
d									×							
ad										×						
bd											×					
abd												×				
cd													×			
acd														×		
bcd															×	
abcd																×

由于 $C\supseteq A$ 及 $B\supseteq B$ 都为真,而(A,B)及(C,B)都是原$\mathbb{K}'$中的元素,因此$(A\to B)$及$(C\to B)$也都为真,所以这个实例为真,因而$(C\to B)$都可被推出,这样每列中蕴含式左部是其它蕴含式左部超级时,这个蕴涵式可删掉。删除这样元素后如表 5 所列。这时无法再用这个公理减少元素,所以依赖基为 $\emptyset\to\emptyset$,$a\to ad$,$b\to bd$,$ab\to abd$,$c\to c$,$ac\to acd$,$bc\to bcd$,$abc\to abcd$,$d\to d$,$cd\to cd$ 。由于这里的公理就是文献[9]中的“前提加属性,结论减属性”的公理,因此这里得到的就是文献[9]中的紧致依赖组成的依赖基。

表 5　紧致依赖基的全部元素

	Ø	a	b	ab	c	ac	bc	abc	d	ad	bd	abd	cd	acd	bcd	abcd
Ø	×															
a										×						
b											×					
ab												×				
c					×											
ac														×		
bc															×	
abc																×
d									×							
ad																
bd																
abd																
cd													×			
acd																
bcd																
abcd																

例 10　设背景$\mathbb{K}=(U,M,I)$,如表 1 所列,公理系统仅包含 1 个公理:

$$\mathfrak{A}=\{(X\subseteq Y)\Rightarrow(X\to Y)\}$$

求$\mathbb{K}$ 关于$\mathfrak{A}$ 的依赖基。首先做出诱导背景$\mathbb{K}'$,如表 2 所列。在$\mathbb{K}'$中考虑所有满足 $A\subseteq B$ 的(A,B),并把它们都删掉,就得到关于$\mathfrak{A}$ 的依赖基。这个依赖基如表 6 中的所有×所列。表 6 中小圆点表示被删掉的元素。

表 6　例 10 中公理系统的依赖基

	Ø	a	b	ab	c	ac	bc	abc	d	ad	bd	abd	cd	acd	bcd	abcd
Ø	*															
a	*	*							×	×						
b	*		*							×			×			
ab	*	*	*	*					×	×	×	×				
c	*				*											
ac	*	*			*	*			×	×			×	×		
bc	*		*		*		*		×		×		×		×	
abc	*	*	*	*	*	*	*	*	×	×	×	×	×	×	×	×
d	*								*							
ad	*	*							*	*						
bd	*		*						*		*					
abd	*	*	*	*					*	*	*	*				
cd	*				*				*				*			
acd	*	*			*	*			*	*			*	*		
bcd	*		*		*		*		*		*		*		*	
abcd	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

例 11　设背景$\mathbb{K}=(U,M,I)$，如表 1 所列，公理系统$\mathfrak{A}$包含 3 个公理：

$(X\subseteq Y)\Rightarrow(X\rightarrow Y)$

$(X\rightarrow Y)\wedge(Y\rightarrow Z)\Rightarrow(X\rightarrow Z)$

$(X\rightarrow Y)\Rightarrow(X\cup Z\rightarrow Y\cup Z)$

这个公理系统即是 Armstrong 公理系统。求$\mathbb{K}$关于$\mathfrak{A}$的依赖基。首先做出诱导背景$\mathbb{K}'$，如表 2 所列。在$\mathbb{K}'$中先根据$(X\rightarrow Y)\wedge(Y\rightarrow Z)\Rightarrow(X\rightarrow Z)$删去所有可删的元素。实际上，例 8 中的表 3 就是这样做的一个结果。接着再根据$(X\subseteq Y)\Rightarrow(X\rightarrow Y)$继续做删除工作，在表 3 中删除满足$A\subseteq B$的$(A,B)$，结果如表 7 所列，最后由$(a,ad)$根据第 3 个公理$(X\rightarrow Y)\Rightarrow(X\cup Z\rightarrow Y\cup Z)$可删去$(ab,abd)$，$(ac,acd)$及$(abc,abcd)$，再由$(b,bd)$根据第 3 个公理$(X\rightarrow Y)\Rightarrow(X\cup Z\rightarrow Y\cup Z)$可删去$(bc,bcd)$，于是仅留下$(a,ad)$及$(b,bd)$，这样得到对 Armstrong 公理系统的依赖基是$\{a\rightarrow ad,b\rightarrow bd\}$，这实际就是这个背景$\mathbb{K}$的 Guigues-Duquenne 基。

表 7　在表 3 中删除满足$A\subseteq B$的(A,B)的元素的结果

	Ø	a	b	ab	c	ac	bc	abc	d	ad	bd	abd	cd	acd	bcd	abcd
Ø																
a										×						
b											×					
ab												×				
c																
ac														×		
bc															×	
abc																×
d																
ad																
bd																
abd																
cd																
acd																
bcd abcd																

通过求依赖基的方法，我们还发现 Armstrong 公理系统的依赖基也是不唯一的，例如表 8 所列的背景的 Guigues-Duquenne 基是$\{a\rightarrow ab,e\rightarrow ec,cd\rightarrow cde,cb\rightarrow abc,abd\rightarrow abcde,abce\rightarrow abcde\}$，但改变删除次序还可求出另外的依赖基，例如$\{a\rightarrow ab,e\rightarrow ec,cd\rightarrow cde,cb\rightarrow abc,ad\rightarrow abcde,be\rightarrow abcde\}$。这一点也是以前人们没有注意到的。

表 8　一个示例形式背景

	a	b	c	d	e
1	×	×			
2		×		×	
3			×		×
4	×	×	×		
5			×	×	×

结束语　值依赖（或"规则"或"属性蕴含"）是很多领域一直共同研究的课题。但多年来很多研究都是着重于实用，因此大多数关键性的概念，例如公理、推导、依赖基等，其定义都是以叙述为主，严格地说并不是数学的形式化定义。另外多年来人们也主要考虑了 Armstrong 公理系统的依赖基，对于"Armstrong 公理系统以外还有没有其它公理系统?""其中有哪些公理系统可以有依赖基?""一共有多少?""如何把它们全部找出来?""同一个公理系统的依赖基是否唯一?"等问题还都较少被考虑。本文给出了值依赖领域各个概念，例如公理、推导、依赖基等，严格的数学的形式化定义，并在此基础上证明了任何一个公理系统对任何一个背景都有依赖基，给出了求依赖基的一般方法，证明了一个公理系统对一个背景的依赖基并不唯一。

在解决了以上问题后，显然还有以下问题需要研究：(1)怎样根据用户的需求给出对这些需求最有效的公理系统及相应的依赖基，从而使本文的结果更好地用于实际。为此有继续研究如何形式化定义用户的需求，形式化定义个性化服务，研究怎样根据用户的需求确定公理系统，进而求出相应的依赖基，以满足个性化服务的目的。(2)本文给出的计算依赖基的一般方法，在证明依赖基的存在及不唯一等方面是有效的，但每次都按这个方法求依赖基太麻烦，一些具体的公理系统可能有一些简单的具体的计算方法，例如 Guigues-Duquenne 基是借助"伪内涵"，紧致依赖的依赖基是借助"内涵亏值"，来简便计算的。这样如何给出相应于一些常用的具体的公理系统简便的计算方法是要研究的另一个重要问题。期望这些问题早日得到解决。

参 考 文 献

[1] Tsumoto S. Medical Reasoning and Rough Sets [C]// International Conference, Rough Sets and Intelligent Systems Paradigms, 2007. Warsaw, Poland, 2007: 90-101

[2] 王国胤. Rough 集理论与知识发现 [M]. 西安：西安交通大学出版社，2001：52-56

[3] Ganter B, Wille R. Formal Concept Analysis [M]. Mathematical Foundations. Springer, 1999: 73-84

[4] 马垣，张学东，迟呈英. 形式概念分析 [M]. 王丽君，译. 北京：科学出版社，2007：62-76

[5] 马垣. 数据库理论. 数据库技术新进展(第 2 版)[M]. 北京：清华大学出版社，2007：22-44

[6] Mannila H, Raibba K J. On the Complexity of Inferring Functional Dependencies [J]. Discrete Applied Mathematics, 1992, 40 (2): 237-243

[7] Guigues J, Duquenne V. Familles Minimales d'implications Informatives Resultants d'un Tableau de Donnees Binaires [C]// Math. Sci. hum. 1986: 495-518

[8] 马垣，曾子维，迟呈英，等. 形式概念及其新进展 [M]. 北京：科学出版社，2011：111-114

[9] 马垣，张学东，迟呈英. 紧致依赖与内涵亏值 [J]. 软件学报，2011, 22(5): 962-971