第 44 卷 第 7 期
2017 年 7 月

计 算 机 科 学
COMPUTER SCIENCE

Vol. 44 No. 7
July 2017

Fibrations 理论在索引归纳数据类型不确定语义中的应用

苗德成[1] 奚建清[2] 刘新盛[3] 苏锦钿[4]

（韶关学院信息科学与工程学院 韶关 512005）[1] （华南理工大学软件学院 广州 510640）[2]

（解放军防空兵学院弹炮一体系 郑州 450052）[3] （华南理工大学计算机科学与工程学院 广州 510640）[4]

摘 要 应用 Fibrations 理论对索引归纳数据类型的不确定语义计算进行了研究。论证了索引范畴的构造，提出了索引 Fibration 及其真值函子与内涵函子，建立了索引范畴上自函子的一种保持真值的提升，提出了部分 F-代数的定义，并应用折叠函数等工具抽象描述了索引归纳数据类型不确定语义计算，辅以实例进行了简要分析，最后通过相关工作的论述指出了 Fibrations 理论研究方法的优势。

关键词 语义计算，不确定，索引归纳数据类型，Fibrations 理论，提升

中图法分类号 TP301.2 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.07.025

Applications of Fibrations Theory to Uncertainty Semantic Computation for Indexed Inductive Data Types

MIAO De-cheng[1] XI Jian-qing[2] LIU Xin-sheng[3] SU Jin-dian[4]

(School of Information Science and Engineering, Shaoguan University, Shaoguan 512005, China)[1]

(School of Software, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)[2]

(Department of Missiles and Shells Integration, Air Defense Forces Academy of PLA, Zhengzhou 450052, China)[3]

(School of Computer Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)[4]

Abstract This paper discussed the uncertainty semantic computation of indexed inductive data types using Fibrations theory. Firstly, we demonstrated the construction of indexed category, presented the concept of indexed Fibration and its truth and comprehension functors. And then, we proposed a truth-preserving lifting on endo-functor in indexed category. We also presented the definition of partial F-algebra, abstractly described the uncertainty semantic computation of indexed inductive data types using some tools including fold function, and briefly introduced the application by example. At last, we stated the advantages of Fibrations theory by comprising with some related works.

Keywords Semantic computation, Uncertainty, Indexed inductive data types, Fibrations theory, Lifting

1 引言

归纳数据类型（Inductive Data Types）[1]是程序语言与类型论[2]的重要研究内容，而索引归纳数据类型（Indexed Inductive Data Types, IIDT）是一种特殊的归纳数据类型，其语法构造与语义计算能力更强，典型的 IIDT 有数组、队列、堆栈与树等。

递归计算可读性好，编写的程序简洁，且易于代码重用。从范畴论[3-5]的角度分析，递归计算源于 IIDT 的初始代数语义[6]，而 IIDT 则被抽象为范畴$\mathbb{C}$上自函子[5] $F:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ 的最小不动点[6] μF，对应初始 F-代数[6]的载体（Carriers）。初始 F-代数的初始性可定义 IIDTμF 上的一个折叠函数[7] $fold$，应用递归计算及其代数定律分析与描述 IIDT 的范畴结构与语义计算[8-9]。

Fibrations 理论[3]是范畴论的一个重要分支，是理论计算机科学的一个新兴研究方向，在数据库系统建模[10]与程序逻辑[11]中有着较为广泛的应用，为抽象描述形式系统间的内在语义联系提供了一种普适性的思维方法与数学工具。

IIDT 的不确定语义[2]计算确保程序的健壮性与可靠性，满足用户对软件系统操作的正确性与一致性要求。本文的主要工作是应用 Fibrations 理论对 IIDT 的不确定语义进行研究。第 2 节给出了 IIDT 的形式化定义，构造了索引范畴，引入索引 fibration 及其真值函子与内涵函子，建立保持真值的提升；第 3 节提出了部分 F-代数的定义；第 4 节基于初始代数的初始性构造折叠函数，应用部分 F-代数等工具抽象描述 IIDT 的不确定语义计算；第 5 节通过实例简要分析了 Fibrations理论在 IIDT 不确定语义计算上的应用；第 6 节分析了当前相关领域的研究工作；最后总结全文并指出后续研究工作。

到稿日期：2016-05-23 返修日期：2016-10-02 本文受广东省自然科学基金项目（S2013010015944），广东省高等学校优秀青年教师培养计划项目（YQ2014155），广东省战略性新兴产业核心技术攻关项目（2012A010701011），广东省科技计划项目（2014B010112007）资助。

苗德成（1979－），男，博士，副教授，主要研究方向为形式语言理论与范畴论方法，E-mail：tony10860@126.com；**奚建清**（1962－），男，博士，教授，博士生导师，主要研究方向为数据库与网络计算；**刘新盛**（1978－），女，硕士，讲师，主要研究方向为指挥自动化与防空武器；**苏锦钿**（1980－），男，博士，副教授，主要研究方向为双代数与共代数。

2 索引 fibration 与函子提升

2.1 IIDT 的形式化定义

本文假定读者具有范畴论基础[3-4]，基范畴(Base Category)与全范畴(Total Category)、fibration 以及 opfibration 等 Fibrations 理论的基本定义可参见文献[3,12]等。记 $\boldsymbol{Obj}\ \mathbb{C}$ 为范畴$\mathbb{C}$的对象集，$\boldsymbol{Mor}\ \mathbb{C}$ 为范畴$\mathbb{C}$的态射集，$\boldsymbol{Set}$ 为集合范畴[3]。

定义 1 以二元组(A,P)表示 IIDT，集合 A 称为(A,P)的索引集，$P:A\to\boldsymbol{Set}$ 称为(A,P)的语义映射。对$\forall a\in A$，Pa 描述(A,P)的语义性质，若 Pa 非空，则称索引对象 a 满足性质 P；否则，称 a 不满足 P。

对另一个 IIDT(B,Q)，有态射$(f,g):(A,P)\to(B,Q)$存在。其中，$f:A\to B$，而对$\forall a\in A$，$g:Pa\to Q(fa)$。IIDT 与其态射构成一个范畴，称为索引范畴，并归结为定理 1。

定理 1 以 IIDT 为对象，以 IIDT 的态射为态射，构成索引范畴$\mathbb{I}$。

证明：与文献[13]中的定理 1 的证明类似，限于篇幅略去证明过程。证毕。

定理 1 构造的索引范畴$\mathbb{I}$为 IIDT 的不确定语义计算提供了一个基本的 Fibrations 理论框架。在定理 1 的基础上进一步定义索引 fibration。

2.2 索引 fibration 及其真值与内涵函子

定义 2 索引 fibration$I:\mathbb{I}\to\boldsymbol{Set}$，将 IIDT$(A,P)$映射为索引集 A，将态射(f,g)映射为 f。

定义 2 的索引 fibration I 将索引范畴$\mathbb{I}$映射为集合范畴 $\boldsymbol{Set}$，仅考虑 IIDT 在 $\boldsymbol{Set}$ 中的集合性质，其本质是一类遗忘函子(Forgetful Functor)[3]。

定义 3 取 $\boldsymbol{Set}$ 中的任一对象 A，$\exists(A,P)\in\boldsymbol{Obj}\ \mathbb{I}$，$(f,g)\in\boldsymbol{Mor}\ \mathbb{I}$，对索引 fibration I，若有 $I(A,P)=A$，$I(f,g)=id_A$，则(A,P)与(f,g)构成的子范畴$\mathbb{I}_A$称为对象 A 的纤维(Fiber)。

$\mathbb{I}_A$是索引 fibration I 的全范畴$\mathbb{I}$的一个全子范畴(Full Subcategory)[3]，$\mathbb{I}_A$到$\mathbb{I}$的包含函子 $Inc:\mathbb{I}_A\to\mathbb{I}$ 是局部单(Faithful)且局部满(Full)的[4]。每一个纤维都有一个终对象(Terminal Objects)[3]，下面引入索引 fibration I 的真值与内涵函子的定义。

定义 4 索引 fibration I 的一个右伴随函子 $T:\boldsymbol{Set}\to\mathbb{I}$，称 T 为 I 的真值函子。

记$\{*\}$为单点集，对$\forall A\in\boldsymbol{Obj}\ \boldsymbol{Set}$，定义 4 的真值函子 T 将索引集 A 映射为索引范畴$\mathbb{I}$上的终对象$(A,\{*\})$。

定义 5 令$\{(A,P)\}$为 IIDT(A,P)的语义集，$\{(A,P)\}=\{(a,p)\mid a\in A,p\in Pa\}$。IIDT 到其语义集的映射扩展为一个函子$\{-\}:\mathbb{I}\to\boldsymbol{Set}$，称$\{-\}$为索引 fibration I 的内涵函子。

定义 5 的内涵函子$\{-\}$是真值函子 T 的一个右伴随函子，即 $I\dashv T\dashv\{-\}$，由这种伴随结构可引入一个自然变换(Natural Transformation)[4]$\sigma:\{-\}\to I$。对$\forall(a,p)\in\{(A,P)\}$，有 $\sigma_{(A,P)}(a,p)=a$，即索引 fibration I 是一个局部满函子，而由 σ 归纳的从索引范畴$\mathbb{I}$到 $\boldsymbol{Set}$ 射范畴$\boldsymbol{Set}^{\to}$的函子是局部单且局部满的。

令 $f:A\to B$ 为索引 fibration I 基范畴$\boldsymbol{Set}$ 中的一个态射，由 f 可反变地扩展为纤维$\mathbb{I}_B$到$\mathbb{I}_A$之间的一个重索引函子 $f^*:\mathbb{I}_B\to\mathbb{I}_A$，$f^*$ 将$\mathbb{I}_B$中的 IIDT(B,Q)映射为$\mathbb{I}_A$中的 IIDT(A,Qf)。称 f^* 的一个左伴随函子为对偶重索引函子，记为${}^*f$，即 ${}^*f\dashv f^*$。${}^*f$ 与 f^* 满足 Beck-Chevalley 条件[12,14-16]，即${}^*f$ 与 f^* 在 Beck-Chevalley 条件约束下，具有良好的图表交换(Diagram Commute)[3]性质，这为 IIDT 的不确定语义计算提供了较大的便利性。

2.3 函子提升

定义 6 自函子 $F:\boldsymbol{Set}\to\boldsymbol{Set}$ 关于索引 fibration I 的一个提升 $F^{\perp}:\mathbb{I}\to\mathbb{I}$，满足图表交换 $FI=IF^{\perp}$。若 $TF\cong F^{\perp}T$，则称 $F^{\perp}$是一个保持真值的提升。

令 $F^{\perp}$为保持真值的提升，则对$\forall(A,P)\in\boldsymbol{Obj}\ \mathbb{I}$，$F^{\perp}(A,P)={}^*(F\sigma_{(A,P)})(T(F(\{(A,P)\})))$，对偶重索引函子${}^*(F\sigma_{(A,P)})$的作用对象 $T(F\{(A,P)\})$为真值函子 T 将 $F\{(A,P)\}\in\boldsymbol{Obj}\ \boldsymbol{Set}$ 映射为$\mathbb{I}$中 $F\{(A,P)\}$的终对象。$F^{\perp}(A,P)$的计算结果是纤维$\mathbb{I}_{FA}$中的一个 IIDT，即$(FA,\{x\mid F\sigma_{(A,P)}x=a\})$，其中$\forall a\in A$，$x\in F\{(A,P)\}$。

3 *F*-代数与部分 *F*-代数

定义 7 设 $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是范畴$\mathbb{C}$上的一个自函子，对$\forall A\in\boldsymbol{Obj}\ \mathbb{C}$，则存在一个 F-代数(A,α)，其中，称 A 为 F-代数(A,α)的载体，$\alpha:FA\to A$ 为 F-代数(A,α)的结构射。

F-代数(A,α)与另一个 F-代数(B,β)的 F-代数同态是载体 A 与 B 之间的一个映射，即 $f:A\to B$，且满足图表交换$f\alpha=\beta(Ff)$。若 F 保持拉回(Pullback)[4]，则其提升 $F^{\perp}$ 保持重索引函子[14]，即对 $f:A\to B$，有 $F^{\perp}f^*\cong(Ff)^*F^{\perp}$。

F-代数的结构射 $\alpha:FA\to A$ 描述 IIDT 的确定语义计算，借鉴形式语义学的部分函数(Partial Function)概念[17]，提出部分 F-代数的定义，以处理 IIDT 的不确定语义计算。

定义 8 设 $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是范畴$\mathbb{C}$上的一个自函子，对$\forall A\in\boldsymbol{Obj}\ \mathbb{C}$，存在一个终对象 1，称$(A,\alpha)$为部分 F-代数，其中，$\alpha:FA\to 1+A$，其载体为 A。

部分 F-代数(A,α)的结构射 $\alpha:FA\to 1+A$ 描述 IIDT 语义计算的不确定性，构造两个内射函数 $\pi_1:1\to 1+A$ 和 $\pi_2:A\to 1+A$。每一个部分 F-代数(A,α)都对应一个 F-代数$(1+A,\alpha_T)$，其中，$\alpha_T:F(1+A)\to 1+A$。F-代数$(1+A,\alpha_T)$处理 IIDT 的确定语义计算，但其索引集为 $1+A$。通过将部分 F-代数(A,α)转化为 F-代数$(1+A,\alpha_T)$来处理索引集为 A 的 IIDT 的不确定语义计算。

4 IIDT 的不确定语义计算

定理 2 以 F-代数为对象，以 F-代数同态为态射，构成 F-代数范畴 $\mathbf{Alg}_F$。

证明：与定理 1 类似，略。证毕。

若 $\mathbf{Alg}_F$ 中存在初始代数，令$(\mu F,in)$为初始 F-代数，则有$(\mu F,in)$到$(1+A,\alpha_T)$的唯一 F-代数同态，可构造 μF 上的折叠函数 fold 及其对结构射 α_T 的作用，如图 1 所示。

初始代数 F-代数$(\mu F,\mathrm{in})$的载体 μF 是自函子 F 的最小不动点，对应 $\boldsymbol{Set}$ 中的 IIDT。同时，$(\mu F,in)$的初始性确保了 $fold\ \alpha_T$ 是唯一的，这种源自初始代数语义的唯一性为 IIDT

的语义建模提供了便利性，如对 $\forall x \in F(\mu F)$，有 $fold\ \alpha_T(in\ x)=\alpha_T((F(fold\ \alpha_T))x)$ 成立。

$$\begin{tikzcd}
F(\mu F) \arrow[r, "F(fold\ \alpha_T)"] \arrow[d, "in"'] & F(1+A) \arrow[d, "\alpha_T"] \\
\mu F \arrow[r, "fold\ \alpha_T"'] & 1+A
\end{tikzcd}$$

图 1　μF 上的折叠函数对 α_T 的作用

记 Inc^{-1} 为包含函子 Inc 的逆，纤维 $\mathbb{I}_{1+A}$ 中自函子 $F^{\perp}_{1+A}$ 的最小不动点为 $\mu F^{\perp}_{1+A}$，纤维 $\mathbb{I}_A$ 中自函子 $F^{\perp}_A$ 的最小不动点为 $\mu F^{\perp}_A$，则有 $\mu F^{\perp}_{1+A} = {}^*(fold\ \alpha_T)\ Inc^{-1}\ T(\mu F)$，$\mu F^{\perp}_A = (\pi_2)^*\ \mu F^{\perp}_{1+A}$。对 $\forall a \in A, x \in \mu F$，记 $\mu F^{\perp}_A = (A, \{x \mid (fold\ \alpha_T)x = \pi_2 a\})$。下面将 $F^{\perp}_A$ 与 $F^{\perp}_{1+A}$ 的内在语义关联归结为定理 3。

定理 3　设 F 是集合范畴 $\boldsymbol{Set}$ 中一个保持拉回的自函子，对于纤维 $\mathbb{I}_A$ 与 $\mathbb{I}_{1+A}$ 中的自函子 $F^{\perp}_A$ 与 $F^{\perp}_{1+A}$，有图表交换 $F^{\perp}_A(\pi_2)^* = (\pi_2)^* F^{\perp}_{1+A}$ 成立。

证明：令 $F^{\perp}_A = (\pi_2)^{**}\ \alpha Inc^{-1} F^{\perp}$，$F^{\perp}_{1+A} = {}^*(\alpha_T) Inc^{-1} F^{\perp}$。有等式 $(\pi_2)^* F^{\perp}_{1+A} = (\pi_2)^{**}(\alpha_T) Inc^{-1} F^{\perp}$ 成立，由 Beck-Chevalley 条件知，纤维 $\mathbb{I}_{FA}$，$\mathbb{I}_{1+A}$ 与 $\mathbb{I}_{F(1+A)}$ 间的对偶重索引函子 ${}^*\alpha$ 和 ${}^*(\alpha_T)$ 与重索引函子 $(F\pi_2)^*$ 有图表交换 ${}^*(\alpha_T) = {}^*\alpha(F\pi_2)^*$，则 $(\pi_2)^{**}(\alpha_T) Inc^{-1} F^{\perp} = (\pi_2)^{**}\ \alpha(F\pi_2)^*\ Inc^{-1} F^{\perp}$。由 $Inc^{-1} F^{\perp}$ 保持重索引函子的性质知 $(\pi_2)^{**}\ \alpha(F\pi_2)^*\ Inc^{-1} F^{\perp} \cong (\pi_2)^{**}\ \alpha Inc^{-1} F^{\perp}(\pi_2)^*$，而 $(\pi_2)^{**}\ \alpha Inc^{-1} F^{\perp}(\pi_2)^* = F^{\perp}_A(\pi_2)^*$，故 $(\pi_2)^* F^{\perp}_{1+A} = F^{\perp}_A(\pi_2)^*$。

证毕。

定理 3 对自函子 $F^{\perp}_A$ 与 $F^{\perp}_{1+A}$ 通过重索引函子 $(\pi_2)^*$ 而满足图表交换性质进行论证，建立了纤维 $\mathbb{I}_A$ 与 $\mathbb{I}_{1+A}$ 间内在的语义联系，将索引集为 A 的 IIDT 的不确定语义计算转换为对索引集为 $1+A$ 的 IIDT 的确定语义描述。例如，对 $\forall X \in F(1+A)$，$P: X \to \boldsymbol{Set}$，$\exists (X,P) \in \boldsymbol{Obj}\ \mathbb{I}_{1+A}$。取索引集 A 中的任一索引对象 a，若 $x_1 \in X, x_2 \in Px_1$，有 $((\pi_2)^{**}(\alpha_T))(X,P) = ((\pi_2)^{**}\ \alpha(F\pi_2)^*)(X,P) = (A, \{(x_1, x_2) \mid \alpha_T x_1 = \pi_2 a\})$。

5　实例分析

例 1　广泛应用于计算机网络的多路径传输与路由定位的着色树(Colored Trees)[18]是一种典型的 IIDT，其索引集由色值确定。二元着色树是一种简单的着色树，设 $\mathbb{C}$ 为二元着色树的索引集，对 $\forall X \in \boldsymbol{Obj}\ \boldsymbol{Set}$，定义二元着色树函子 $FX = 1 + \mathbb{C} \times X \times X$，令 $leaf: 1 \to 1 + \mathbb{C} \times X \times X$ 与 $node: \mathbb{C} \times X \times X \to 1 + \mathbb{C} \times X \times X$ 为语义函数，处理二元着色树叶节点与内节点的语义。下面，由二元着色树这种简单的 IIDT 构造另一种相对复杂的 IIDT——红黑树(Red Black Trees)[19]，并应用本文提出的部分 F-代数处理红黑树的不确定语义计算。

记 Nat 为自然数集，记录至任意叶节点的色值为黑色的内节点数量，$\mathbb{C} = \{red, black\}$。定义部分 F-代数 $F(\mathbb{C} \times Nat) \to 1 + \mathbb{C} \times Nat$，其载体为 $\mathbb{C} \times Nat$，则有：

$[\![leaf]\!] = \pi_2(black, 1)$

$[\![node(red, (c_1, n_1), (c_2, n_2))]\!] =$

$$\begin{cases} \pi_2(red, n_1), & \text{if } c_1 = c_2 = black \wedge n_1 = n_2 \\ \pi_1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$[\![node(black, (c_1, n_1), (c_2, n_2))]\!] =$

$$\begin{cases} \pi_2(black, n_1 + 1), & \text{if } n_1 = n_2 \\ \pi_1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

令 μF_{CT} 为自函子 $F: \boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Set}$ 的最小不动点，对应 $\boldsymbol{Set}$ 中的 IIDT 二元着色树。记 μF_{RB} 为 IIDT 红黑树，其索引集 A 为 $\mathbb{C} \times Nat$，则对 $\forall a = (c, n) \in A$，其中 $c = red \vee black, n \in Nat$，则有 $\mu F_{RB} = \mu F^{\perp}_A = (A, \{x \mid (fold\ \alpha_T)x = \pi_2 a\})$。

其中，π_1 与 π_2 为第 3 节定义的内射函数。叶节点的语义是显然的，即每个叶节点都是黑色的，而内节点的不确定语义描述则保证了红黑树的两条重要性质：每个红色内节点的两个子节点都是黑色的，任一内节点到所有叶节点的所有路径都包含了相同数量的黑色节点。

红黑树本质上是一种自平衡的树结构，在函数式程序语言编程中应用较为广泛，可作为持久化存储的数据结构，如构造关联数组与集合等。例 1 对红黑树不确定语义计算进行描述确保其关键性质的正确实现，即从根到叶节点的最长路径不多于最短路径的两倍，进而约束了红黑树的平衡性，在插入、删除与查找等时间效率方面提供了高效的数据操作。

二元着色树 μF_{CT} 是一类简单的 IIDT，例 1 应用 Fibrations 理论由 μF_{CT} 构造了另一类复杂的 IIDT 红黑树 μF_{RB}，从 Fibrations 理论的角度进一步拓展了传统类型论的研究内容，为 IIDT 的不确定语义计算提供了一种简洁的描述方式。特别是应用函数式程序语言(如 Haskell, ML 等)针对红黑树编写的代码，在保持平衡获得高性能查找效率方面，具有易读、易写、易理解等良好的性质。

6　相关研究

归纳数据类型的理论基础是 Martin-Löf 构造类型论[20]，20 世纪 90 年代以后，广义归纳数据类型成为归纳数据类型的研究热点，并且在集合语义与构造演算等方面的研究中[21-22]融入了 Martin-Löf 构造类型论。国内学者傅育熙提出了广义归纳数据类型的范畴模型 $\boldsymbol{Per}$[23]，并应用构造演算方法对有效拓扑斯(Effective Topos)的子范畴 ω-$\boldsymbol{Set}$ 的范畴语义进行了解释[24]。

现有成果主要停留在归纳数据类型的层面，而对 IIDT 的研究目前还处于起步阶段，相关成果较少。贝叶斯网[25]根据历史数据建模计算相应参数，对未知事件进行预测，计算逻辑清晰且有坚实的数学基础，但其独立性假设过于苛刻，要求各节点均匀独立且节点之间不相关，实际的语义计算难以满足，且先验概率在软件工程中难以获得。粗糙集(Rough Sets)方法[26]尽管不需附加的假设条件，以数据驱动的方式完成问答过程，但其对数据的精确性要求与程序运行中的不确定性相违背，难以适应实际的软件开发过程。文献[27]认为随机性和模糊性是不确定性最基本的内涵，提出基于熵的云模型为实现不确定性人工智能找到一种简单、有效的形式化方法，但这种方法并不适合 IIDT 不确定性语义计算，因为程序运行过程具有部分函数性质，模糊性质并不适用。

目前研究 IIDT 不确定语义的文献不多，传统语义模型不

再适用。如 Ada 语言允许表达式有副作用但对求值顺序不做规定，同一表达式序列计算顺序的不同导致语义模型不唯一[17]。一些主流的面向对象程序语言，如 C#，Java 等，尽管在一定程度上考虑了并发进程执行的不确定性，但具体的处理过程仅停留在语法层面，缺乏具体的语义计算描述。

现有的不确定语义计算方法难以满足日益增长的软件研发需求，而当前对 IIDT 的研究的主要问题体现在两个方面：1)语法构造侧重于应用数理逻辑与代数方法，有较强的倾向性而不具备普适意义；2)语义计算缺乏统一的数学工具，难以进行精确的形式化描述。

相对于现有的研究成果，本文应用 Fibrations 理论在 IIDT 的不确定语义计算方面具有独特的优势，主要体现在以下 3 点：

(1)简洁描述与灵活扩展的 Fibrations 理论对 IIDT 进行精确的形式化描述，在统一的范畴论框架内，应用折叠函数与部分 F-代数等工具描述 IIDT 的不确定语义计算，具有较强的普适性；

(2)高度抽象的 Fibrations 理论在索引范畴内由一类简单的 IIDT 构造出另一类复杂的 IIDT，如例 1 由二元着色树构造红黑树，不再依赖于传统数理逻辑与代数方法的特定约束，增强了 IIDT 的内聚性，降低了模块间的耦合性，从而提升了软件开发的效率；

(3)Fibrations 理论的一致性与严密性适用于严密推理，尤其是在程序语言建模初期对 IIDT 的分析与构造，降低了软件开发初期的设计风险，为后期确认测试与系统维护等工作提供了可靠的依据。

结束语 本文应用 Fibrations 理论在 IIDT 的不确定语义计算方面做了一些初步的研究工作，将传统的数理逻辑与代数研究方法扩展至 Fibrations 理论的层面。下一步将在此基础上，展开对 IIDT 语义性质分析与归纳规则描述的后续研究工作，深入探讨 IIDT 语义计算及其程序逻辑的数学结构和相应的范畴解释。

参 考 文 献

[1] 陈意云，张昱. 程序设计语言理论(第二版)[M]. 北京：高等教育出版社，2010：135-219.

[2] WINSKEL G. 程序设计语言的形式语义[M]. 宋国新，等译. 北京：机械工业出版社，2005：143-259.

[3] BARR M，WELLS C. Category theory for computing science [M]. NewYork：Prentice-Hall，1990：252-270.

[4] 贺伟. 范畴论[M]. 北京：科学出版社，2006：23-44.

[5] 王兵山，毛晓光，刘万伟. 高级范畴论[M]. 北京：清华大学出版社，2012：1-114.

[6] RUTTEN J. Universal coalgebra：a theory of systems[J]. Theoretical Computer Science，2000，249(1)：3-80.

[7] HUTTON G. Fold and unfold for program semantics [C] // Proc. of the 3rd ACM SIGPLAN Int. Conf. on Functional Programming，1998. NewYork：ACM，1998：280-288.

[8] BIRD R S，MOOR O D. Algebra of Programming[M]. UK：Prentice-Hall，1997：107-156.

[9] SU J D，YU S S. Bialgebraic Structures for Abstract Data Types and Their Computations[J]. Journal of Computer Research and Development，2012，49(8)：1787-1803. (in Chinese)
苏锦钿，余珊珊. 抽象数据类型的双代数结构及其计算[J]. 计算机研究与发展，2012，49(8)：1787-1803.

[10] JOHNSON M，ROSEBRUGH R，WOOD R J. Lenses，fibrations and universal translations[J]. Mathematics Structure in Computer Science，2012，22(1)：25-42.

[11] GHANI N，JOHANN P，FUMEX C. Generic fibrationalinduction[J]. Logical Methods in Computer Science，2012，8(2)：1-27.

[12] MIAO D C，XI J Q，DAI J G，et al. Fibrations method of co-inductive data types in programming[J]. Computer Science，2016，43(3)：188-192，212. (in Chinese)
苗德成，奚建清，戴经国，等. 程序语言中共归纳数据类型的一种 fibrations 方法[J]. 计算机科学，2016，43(3)：188-192，212.

[13] MIAO D C，XI J Q，SU J D. A category theoretical method of inductive data types[J]. Computer Science，2015，42(6)：8-11. (in Chinese)
苗德成，奚建清，苏锦钿. 归纳数据类型的范畴论方法[J]. 计算机科学，2015，42(6)：8-11.

[14] HERMIDA C，JACOBS B. Structural induction and coinduction in a fibrational setting [J]. Information and Computation，1998，145(2)：107-152.

[15] GHANI N，JOHANN P，FUMEX C. Indexed induction and coinduction，fibrationally[J]. Logical Methods in Computer Science，2013，9(3-6)：1-31.

[16] MIAO D C，XI J Q，GUO Y B，et al. Inductive data types based on Fibrations theory in programming[J]. Journal of Computing and Information Technology，2016，24(1)：1-16.

[17] 屈延文. 形式语义学基础与形式说明[M]. 北京：科学出版社，2010：194-207.

[18] SRINIVASAN R，MITHUN H，MARWAN K. Linear time distributed construction of colored trees for disjoint multiple routing[J]. Computer Networks，2007，51(10)：2854-2866.

[19] WEISS M A. 数据结构与算法分析 C++描述(第 3 版)[M]. 张怀勇，译. 北京：人民邮电出版社，2007：379-387.

[20] Bengt N，Kent P，Jan M S. Martin-Löf 类型论程序设计导引[M]. 宋方敏，译. 南京：南京大学出版社，2002：1-15.

[21] COQUAND T，PAULIN M C. Inductively Defined Types[J]. International Conference on Colog，1990(417)：50-66.

[22] DYBIER P. Inductive sets and families in Martin-Lof type theory and their set theoretical semantics[M]. Cambridge University Press，1991：3-27.

[23] FU Y. Recursive Models of General Inductive Types[J]. IOS Press，1996，26(2)：115-131.

[24] FU Y X. Constructive Semantics of Inductive Types[J]. Journal of Software，1998，9(3)：236-240.

[25] PAWLAK Z. Rough sets，decision algorithms and Bayes' theorem [J]. European Journal of Operational Research，2002，136(1)：181-189.

[26] ZIARKO W P，RIJSBERGEN C J V. Rough Sets，Fuzzy Sets and Knowledge Discovery [M]. New York：Springer-Verlag，1994：366-376.

[27] LI D Y，LIU C Y，DU Y，et al. Artificial Intelligence with Uncertainty[J]. Journal of Software，2004，15(11)：1583-1594. (in Chinese)
李德毅，刘常昱，杜鹢，等. 不确定性人工智能[J]. 软件学报，2004，15(11)：1583-1594.