Vague 划分

梁家荣[1] 刘 力[2] 伍华健[2]
(广西大学计算机与电子信息学院 南宁 530004)[1] (玉林师范学院数学与计算机科学系 玉林 537000)[2]

摘 要 根据vague集具有真假隶属度的特点,首先提出了基于t-模和t-余模的真相容度、假相容度、真相等度和假相等度的概念。然后合理地利用真相容度、假相容度、真相等度和假相等度提出了半vague划分和vague划分的概念,并讨论了它们的性质。

关键词 t-模,t-余模,剩余蕴含,半vague划分,vague划分

Vague Partions

LIANG Jia-rong[1] LIU Li[2] WU Hua-jian[2]
(School of Computer and Electronic, Guangxi University, Nanning 530004, China)[1]
(Department of Mathematics and Computer Science, Yulin Normal University, Yulin 537000, China)[2]

Abstract The concepts of degree of truth-compatibility, degree of false-compatibility degree of truth-equality, degree of false-equality based on t-norm and t-conorm were introduced, because a vague set has the characteristic of truth-membership function and fase-membership function. Futhermore we presented the concepts of semi-vague partitions and vague partitions by using locically degree of truth-compatibility, degree of false-compatibility degree of truth-equality, degree of false-equality, and we investigated the characters of semi-vague partitions and vague partitions.

Keywords t-norm, t-conorm, Semi-vague partion, Vague partion

1 引言

近年来,人工智能从研究内容到研究方法都有了很大的发展,研究人工智能的工具也在不断地发展。作为处理不完整和不完全信息智能系统的重要工具,模糊集理论自从Zaden于1965年提出后[1],其理论和应用(例如在自动控制、模式识别、智能决策)取得了巨大的成就[2-6]。在传统的模糊集中,一个元素x与一个集合X之间的关系由一个介于[0,1]之间的数$\mu(x)$来表示,它包含了支持和反对这一对象x隶属于集合X的程度,但无法表达既不反对也不支持这一对象x隶属于集合X的中立情况,给许多实际问题(如投票模型、医疗诊断和多目标决策等)的研究和处理带来了困难。为了解决这一问题,1986年Atanassov提出了所谓的直角模糊集[6]。Atanassov提出用真隶属度t和假隶属度f两个量来描述一个对象x和一个集合X之间的隶属关系。后来,1993年Gau和Buehrer定义了一个所谓的vague集[7]。值得指出的是,Bustince和Burillo在文献[8]中证明vague集就是直觉模糊集。虽然,vague集理论和应用已取得了一定的发展[9-15],但与经典集合理论和传统的模糊集理论相比,vague集理论还有许多不尽完善的地方,例如vague划分的相关理论目前少有文献报道。由于经典集合划分理论、模糊划分等工具已在数据挖掘和决策分类中起到了极为重要的作用,因此把经典集合划分理论、模糊划分理论推广到vague集理论,是一种很自然的想法。然而遗憾的是,完整vague划分理论尚未建立起来,使得vague集理论应用到智能决策、人工智能及模式识别等领域受到了一定程度的限制。本文考虑到vague集有真假隶属度的特点,系统地研究了半vague划分和vague划分及其关系,成功地解决了vague集理论在划分方面的不足,对丰富和发展vague集理论具有重要的学术意义。

2 准备工作

定义1[16] 映射$T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$,如果$\forall a,b,c,d\in[0,1]$满足条件:

(1)交换律:$T(a,b)=T(b,a)$

(2)结合律:$T(T(a,b),c))=T(a,T(b,c))$

(3)单调性:$a\leqslant c,b\leqslant d\Rightarrow T(a,b)\leqslant T(c,d)$

(4)边界条件:$T(1,a)=a$

则称T为t-模(t-norm)。

定义2[16] 映射$S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$,如果$\forall a,b,c,d\in[0,1]$满足条件:

(1)交换律:$S(a,b)=S(b,a)$

(2)结合律:$S(S(a,b),c))=S(a,S(b,c))$

(3)单调性:$a\leqslant c,b\leqslant d\Rightarrow S(a,b)\leqslant S(c,d)$

(4)边界条件:$S(a,0)=a$。

到稿日期:2008-12-24 返修日期:2009-02-27 本文受国家自然科学基金项目(60564001),教育部"新世纪优秀人才支持计划"专项(NCET-06-0756),广西自然科学基金项目(桂科自0832286)资助。

梁家荣(1966—),男,博士,博士后,教授,主要研究方向为人工智能、数据挖掘、模糊控制,E-mail:liangjr@gxu.edu.cn;**刘 力**(1957—),男,硕士,教授,主要研究方向为人工智能、智能控制;**伍华健**(1965—),男,硕士,教授,主要研究方向为人工智能、网络可靠性分析。

则称 S 为 t-余模(t-conorm)或 s-模(s-norm)。

设 A 是论域 X 的 vague 集[2]，$Y\subseteq X$。只考虑 A 在 Y 上的 vague 属性时，用 $A|_Y$ 来表示，也就是当 $x\in Y$ 时 $t_{A|_Y}(x)=t_A(x)\wedge f_{A|_Y}(x)=f_A(x)$；当 $x\in X-Y$ 时 $t_{A|_Y}(x)$ 和 $f_{A|_Y}(x)$ 都没有意义。

定义 3 设 T_1 和 T_2 是两个 t-模，S_1 和 S_2 是两个 t-余模，称 t-模(T_1,S_1)比 t-模(T_2,S_2)弱，如果$(\forall a,b\in[0,1])(T_1(a,b)\leqslant T_2(a,b)\wedge S_1(a,b)\geqslant S_2(a,b))$。

定义 4 设 A 是论域 X 上的一个 vague 集，称 $ker A=\{x|x\in X\wedge t_A(x)=1\wedge f_A(x)=0\}$ 为 A 的核。若 A 的核非空，则称 A 是一个可形式化的 vague 集。

定义 5 对于 t-模 T，t-余模 S，

1)称二元算子 $\varphi_T(x,y)=\sup\{z|z\in[0,1]\wedge T(x,z)\leqslant y\}$，$x,y\in[0,1]$为 T 的剩余蕴含；

2)称二元算子 $\varphi_S(x,y)=\inf\{z|z\in[0,1]\wedge S(z,y)\geqslant x\}$，$x,y\in[0,1]$为 S 的剩余蕴含。

性质 1 对于 $\forall x,y\in[0,1]$，t-模 T 的剩余蕴含算子 φ_T 和 t-余模 S 的剩余蕴含满足如下性质：

1)$\varphi_T(1,y)=y,\varphi_S(x,0)=x$。2)如果 $x\leqslant y$，则 $\varphi_T(x,y)=1,\varphi_S(x,y)=0$。

证明：容易由定义 5 得出(略)。

定义 6 一个 t-模 T 称为左半连续的，如果

$\forall(x,y,z)\in[0,1]\times[0,1]\times[0,1](z\leqslant\varphi_T(x,y)\Leftrightarrow T(x,z)\leqslant y)$

性质 2 设 T 是一个 t-模，如果 T 是左半连续的，则

$\forall(x,y)\in[0,1]\times[0,1](\varphi_T(x,y)=1\Rightarrow x\leqslant y)$

记 $\phi_T(x,y)=\min(\varphi_T(x,y),\varphi_T(y,x))$，$\phi_S(x,y)=\max(\varphi_S(x,y),\varphi_S(y,x))$，显然有 $\phi_T(x,y)=\varphi_T(\max(x,y),\min(y,x))$，$\phi_S(x,y)=\varphi_s(\max(x,y),\min(y,x))$。

定义 7 设 T 是一个 t-模，S 是一个 t-余模，A 和 B 是 X 上的 vague 集，

1) 称 $C_t^T(A,B)=\sup\limits_{x\in X}T(t_A(x),t_B(x))$为 A 和 B 的真相容度；

2) 称 $C_f^S(A,B)=\inf\limits_{x\in X}S(f_A(x),f_B(x))$为 A 和 B 的假相容度；

3)称 $E_t^T(A,B)=\inf\limits_{x\in X}\phi_T(t_A(x),t_B(x))$为 A 和 B 的真相等度；

4)称 $E_f^S(A,B)=\sup\limits_{x\in X}\phi_S(f_A(x),f_B(x))$为 A 和 B 的假相等度。

对于任一 vague 集 A，总有 $C_t^T(A,A)\leqslant E_t^T(A,A)=1$，$C_f^S(A,A)\geqslant E_f^S(A,A)=0$。

性质 3 设 T 是一个 t-模，S 是一个 t-余模，那么对于任意的 X 上的 vague 集 A 和 B，以下结论成立：

$E_t^T(A,B)=1\wedge E_f^S(A,B)=0\Leftrightarrow A=B$

证明：1)若 $A=B$，显然有 $E_t^T(A,B)=1\wedge E_f^S(A,B)=0$；2)若 $E_t^T(A,B)=1\wedge E_f^S(A,B)=0$，则 $E_t^T(A,B)=1$ 且 $E_f^S(A,B)=0$。对于 $\forall x\in X$，由 $E_t^T(A,B)=1$ 得 $\phi_T(t_A(x),t_B(x))=1$，从而$\varphi_T(t_A(x),t_B(x))=\varphi_T(t_B(x),t_A(x))=1$。因此有 $\varphi_T(t_A(x),1)\leqslant t_B(x)$ 和 $\varphi_T(t_B(x),1)\leqslant t_A(x)$，所以 $t_A(x)\leqslant t_B(x)\wedge t_B(x)\leqslant t_A(x)$，也就是 $t_A(x)=t_B(x)$，同理，由 $E_f^S(A,B)=0$ 可以推得 $f_A(x)=f_B(x)$。综上所述，有 $A=B$。

3 主要结果

下面给出 vague 半划分和 vague 划分的定义。

定义 8 设 T 是一个 t-模，S 是一个 t-余模，π 是由若干个 X 上可形式化的 vague 组成的集合，称 π 是 X 上的一个半 vague 划分，如果 $\forall A,B\in\pi$，$C_t^T(A,B)\leqslant E_t^T(A,B)\wedge C_f^S(A,B)\geqslant E_f^S(A,B)$。

性质 4 设 T 是一个 t-模，S 是一个 t-余模，如果 π 是 X 的一个半 vague 划分，那么对于任意的 π 中的 A 和 B 有 $C_t^T(A,B)=E_t^T(A,B)\wedge C_f^S(A,B)=E_f^S(A,B)$。

证明：设 $A,B\in\pi$，而 $x_1\in ker A$，$x_2\in ker B$，则

$$\begin{aligned}C_t^T(A,B)&=\sup_{x\in X}T(t_A(x),t_B(x))\\&\geqslant\max(T(t_A(x_1),t_B(x_1)),T(t_A(x_2),t_B(x_2)))\\&=\max(t_B(x_1),t_A(x_2))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_t^T(A,B)&=\inf_{x\in X}\phi_T(t_A(x),t_B(x))\\&\leqslant\min(\varphi_T(\max(t_A(x_1),t_B(x_1)),\min(t_A(x_1),t_B(x_1)))\varphi_T(\max(t_A(x_2),t_B(x_2)),\min(t_A(x_2),t_B(x_2)))\\&=\min(\varphi_T(1,t_B(x_1)),\varphi_T(1,t_A(x_2)))=\min(t_B(x_1),t_A(x_2))\end{aligned}$$

因此

$$C_t^T(A,B)\geqslant E_t^T(A,B)\tag{1}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}C_f^S(A,B)&=\inf_{x\in X}\phi_S(f_A(x),f_B(x))\\&\leqslant\min(\varphi_S(\max(f_A(x_1),f_B(x_1)),\min(f_A(x_1),f_B(x_1)),\varphi_S(\max(f_A(x_2),f_B(x_2)),\min(f_A(x_2),f_B(x_2)))\\&=\min(\varphi_S(f_B(x_1),0),\varphi_S(f_A(x_2),0))\\&=\min(f_B(x_1),f_A(x_2))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_f^S(A,B)&=\sup_{x\in X}S(f_A(x),f_B(x))\\&\geqslant\max(S(f_A(x_1),f_B(x_1)),S(f_A(x_2),f_B(x_2)))\\&=\max(f_B(x_1),f_A(x_2))\end{aligned}$$

因此

$$E_f^S(A,B)\geqslant C_f^S(A,B)\tag{2}$$

由 π 是 X 的一个半 vague 划分及式(1)和式(2)得：

$C_t^T(A,B)=E_t^T(A,B)\wedge C_f^S(A,B)=E_f^S(A,B)$

性质 5 设 T 是一个 t-模，S 是一个 t-余模，如果 π 是 X 的一个半 vague 划分，那么：

$K(\pi)=\{ker A|A\in\pi\}$构成 X 的一个半划分。

证明：由于 π 是 X 的一个半 vague 划分，因此 $\forall A\in\pi$，$ker A\neq\phi$。此外，若对于任意的 π 中的 A 和 B，$ker A\cap ker B\neq\phi$，必有$ker A=ker B$。为此只需证明 $ker A\subseteq ker B\wedge ker B\subseteq ker A$。若 $x\in ker A$，由 $C_t^T(A,B)=1$ 可得 $E_t^T(A,B)=1$，从而 $\phi_T(t_A(x),t_B(x))=1\Rightarrow\varphi_T(1,t_B(x))=1\Rightarrow t_B(x)=1$。另一方面，由 $C_f^S(A,B)=0$ 可得 $E_f^S(A,B)=0$，从而 $\phi_S(f_A(x),f_B(x))=0\Rightarrow\varphi_S(t_B(x),0)=0\Rightarrow f_B(x)=0$，所以 $x\in ker B$，因此 $ker A\subseteq ker B$。类似地可得 $ker B\subseteq ker A$，所以 $ker A=ker B$，这就证明了 $K(\pi)=\{ker A|A\in\pi\}$构成 X 的一个半划分。

性质 6 设 T 是一个 t-模，S 是一个 t-余模，如果 π 是 X 的一个半 vague 划分，那么对于任意的 π 中的 A 和 B，$ker A=$

$ker\,B \Rightarrow A = B$

证明：由 π 是 X 的一个半 vague 划分可知 $ker\,A = ker\,B \neq \phi$，进而得到 $C_t^T(A,B)=1$ 及 $C_f^S(A,B)=0$。所以 $E_t^T(A,B)=1$ 及 $E_f^S(A,B)=0$。由 $E_t^T(A,B)=1 \Rightarrow \forall x\in X(\phi_T(t_A(x),t_B(x))=1) \Rightarrow \forall x\in X(\varphi_T(t_A(x),t_B(x)))=1 \wedge \varphi_T(t_B(x),t_A(x)))=1 \Rightarrow \forall x\in X(\varphi_T(t_A(x),1)\leqslant t_B(x)) \wedge \varphi_T(t_B(x),1))\leqslant t_A(x)) \Rightarrow \forall x\in X(t_A(x)\leqslant t_B(x) \wedge t_B(x)\leqslant t_A(x)) \Rightarrow \forall x\in X(t_A(x)=t_B(x))$。

另一方面，$E_f^S(A,B)=0 \Rightarrow \forall x\in X(\phi_S(f_A(x),f_B(x))=0) \Rightarrow \forall x\in X(\varphi_S(f_A(x),f_B(x))=0 \wedge \varphi_S(f_B(x),f_A(x)))=0 \Rightarrow \forall x\in X(\varphi_S(f_B(x),0)\geqslant f_A(x)) \wedge \varphi_S(f_A(x),0)\geqslant f_B(x)) \Rightarrow \forall x\in X(f_B(x)\geqslant f_A(x) \wedge f_A(x)\geqslant f_B(x)) \Rightarrow \forall x\in X(f_A(x)=f_B(x))$

综上所述，有 $A=B$。

定义 9 设 T 是一个 t-模，S 是一个 t-余模，π 是由若干个 X 上可形式化的 vague 组成的集合。称 π 是 X 的一个 vague 划分，如果 π 是 X 的一个半 vague 划分且集合 $K(\pi)=\{ker\,A \mid A\in\pi\}$ 是 X 的一个划分。

例 1 设 $X=[0,1)$，考虑如下定义的 vague 集 $A_i, i=1,2,\cdots,n$：

$$t_{A_i}(x)=\begin{cases}1, x\in[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n})\\ a, x\notin[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n})\end{cases},$$

$$f_{A_i}(x)=\begin{cases}0, x\in[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n})\\ b, x\notin[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n})\end{cases}$$

其中，$a\in[0,1)$，$b\in(0,1]$，$a+b\leqslant 1$，a 和 b 是常数。对任意的 t-模 T，t-余模 S，都有 $C_t^T(A_i,A_j)=E_t^T(A_i,A_j)=a$，$C_f^S(A_i,A_j)=E_f^S(A_i,A_j)=b$。这样 $\pi=\{A_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$ 就是 X 的一个 vague 划分。

下面讨论 vague 划分的性质。

定理 1 设 T 是一个 t-模，S 是一个 t-余模，如果 π 是 X 上的一个半 vague 划分，那么 $\forall A,B\in\pi(\exists a\in[0,1] \wedge \exists b\in[0,1])(\forall x\in ker\,B)(t_A(x)=a \wedge f_A(x)=b)$。

证明：$\forall A,B\in\pi$，只要证明 $\forall x\in ker\,B$，$t_A(x)$ 和 $f_A(x)$ 是常数。若存在 $x\in ker\,B$ 和 $y\in ker\,B$，使得 $t_A(x)\neq t_A(y)$，不妨设 $t_A(x)>t_A(y)$。一方面，有：

$$C_t^T(A,B)\geqslant T(t_A(x),t_B(x))=t_A(x)$$

另一方面，有：

$$E_t^T(A,B)\leqslant \phi_T(t_A(y),t_B(y))=\varphi_T(1,t_A(y))=t_A(y)$$

这样，得到 $C_t^T(A,B)>E_t^T(A,B)$，这与 π 是 X 上的一个半 vague 划分矛盾，因此 $t_A(x)$ 是一个常数。下面证明 $f_A(x)$ 亦为常数。否则，若存在 $x\in ker\,B$ 和 $y\in ker\,B$ 使得 $f_A(x)\neq f_A(y)$，不妨设 $f_A(x)>f_A(y)$。一方面，有：

$$C_f^S(A,B)\leqslant \phi_S(f_A(y),f_B(y))=\varphi_S(f_A(y),0)=f_A(y)$$

另一方面，有：

$$E_f^S(A,B)\geqslant S(f_A(x),f_B(x))=S(f_A(x),0)=f_A(x)$$

这样，得到 $C_f^S(A,B)<E_t^T(A,B)$，这与 π 是 X 上的一个半 vague 划分矛盾，因此 $f_A(x)$ 亦为常数。

定理 2 设 T 是一个 t-模，S 是一个 t-余模，如果 $\pi=\{A_i \mid i\in I\}$ 是 X 上的一个半 vague 划分，那么必存在两常数序列 $\{a_{ij}\},\{b_{ij}\}$，$a_{ij}\in[0,1]$，$b_{ij}\in[0,1]$，$a_{ij}+b_{ij}\leqslant 1$，$i,j\in I$，使得如下条件成立：

(i) $(\forall i,j\in I)(\forall x\in ker\,A_j)(t_{A_i}(x)=a_{ij} \wedge f_{A_i}(x)=b_{ij})$；

(ii) $(\forall i\in I)(a_{ii}=1 \wedge b_{ii}=0)$；

(iii) $(\forall i,j\in I)(a_{ij}=a_{ji} \wedge b_{ij}=b_{ji})$；

(iv) $(\forall i,j,k\in I)(T(a_{ik},a_{kj})\leqslant a_{ij} \wedge S(b_{ik},b_{kj})\geqslant b_{ij})$。

证明：由定理 1，取 $a_{ij}=t_{A_i}(x) \wedge b_{ij}=f_{A_i}(x)$，$x\in ker\,A_j$，显然 $\{a_{ij}\},\{b_{ij}\}$，$a_{ij}\in[0,1]$，$b_{ij}\in[0,1]$，$a_{ij}+b_{ij}\leqslant 1$，$i,j\in I$，同时有 $(\forall i\in I)(a_{ii}=1 \wedge b_{ii}=0)$。为此只需证明(iii)和(iv)。注意到：

$$\max(a_{ij},a_{ji})\leqslant C_t^T(A_i,A_j)\leqslant E_t^T(A_i,A_j)\leqslant \min(a_{ij},a_{ji})\leqslant \max(a_{ij},a_{ji})$$

$$\max(b_{ji},b_{ij})\leqslant E_f^S(A_i,A_j)\leqslant C_f^S(A_i,A_j)\leqslant \min(b_{ji},b_{ij})\leqslant \max(b_{ji},b_{ij})$$

因此 $(\forall i,j\in I)(a_{ij}=a_{ji} \wedge b_{ij}=b_{ji})$。现在证明(4)。一方面有：

$$C_t^T(A_i,A_j)=\sup_{x\in X} T(t_{A_i}(x),t_{A_j}(x))\geqslant \sup_{x\in ker A_k} T(t_{A_i}(x),t_{A_j}(x))=T(a_{ik},a_{jk})=T(a_{ik},a_{kj})$$

$$\begin{aligned}E_t^T(A_i,A_j)&=\inf_{x\in X}\phi_T(t_{A_i}(x),t_{A_j}(x))\\&\leqslant \inf_{x\in X}(\varphi_T(\max(t_{A_i}(x),t_{A_j}(x)),\min(t_{A_i}(x),t_{A_j}(x))\\&\leqslant \inf_{x\in ker A_j}\varphi_T(\max(t_{A_i}(x),t_{A_j}(x)),\min(t_{A_i}(x),t_{A_j}(x))\\&=\inf_{x\in ker A_j}\varphi_T(1,a_{ij})=a_{ij}\end{aligned}$$

从而有 $T(a_{ik},a_{kj})\leqslant C_t^T(A_i,A_j)\leqslant E_t^T(A_i,A_j)\leqslant a_{ij}$。

另一方面，有：

$$\begin{aligned}E_f^S(A_i,A_j)&=\sup_{x\in X}\phi_S(f_{A_i}(x),f_{A_j}(x))\\&\geqslant \sup_{x\in X}\varphi_S(\max(f_{A_i}(x),f_{A_j}(x)),\min(f_{A_i}(x),f_{A_j}(x)))\\&\geqslant \sup_{x\in ker A_j}\varphi_S(\max(f_{A_i}(x),f_{A_j}(x)),\min(f_{A_i}(x),f_{A_j}(x)))\\&=\sup_{x\in ker A_j}\varphi_S(a_{ij},0)=a_{ij}\end{aligned}$$

$$C_f^S(A_i,A_j)=\inf_{x\in X} S(f_{A_i}(x),f_{A_j}(x))\leqslant \inf_{x\in ker A_k} S(f_{A_i}(x),f_{A_j}(x))=S(b_{ik},b_{jk})=S(b_{ik},b_{kj})$$

所以 $b_{ij}\leqslant E_f^S(A_i,A_j)\leqslant C_f^S(A_i,A_j)\leqslant S(b_{ik},b_{kj})$。

定理 3 设 T 是一个 t-模，S 是一个 t-余模，$\pi=\{A_i \mid i\in I\}$ 是 X 上的一个半 vague 划分，如果 $\forall i,j\in I$，$ker\,A_i=ker\,A_j$，那么 $A_i|_{\bigcup_{k\in I} ker A_k}=A_j|_{\bigcup_{k\in I} ker A_k}$。

证明：设 $\{a_{ij}\},\{b_{ij}\}$，$a_{ij}\in[0,1]$，$b_{ij}\in[0,1]$，$a_{ij}+b_{ij}\leqslant 1$，$i,j\in I$ 为定理 2 中定义的两常数序列。$\forall x\in ker\,A_k$，必存在 $k\in I$ 使得 $A_k\in\pi$。一方面有 $t_{A_i}(x)=a_{ik}=a_{ki} \wedge f_{A_i}(x)=b_{ik}=b_{ki}$ 和 $t_{A_j}(x)=a_{jk}=a_{kj} \wedge f_{A_j}(x)=b_{jk}=b_{kj}$。另一方面，因为 $ker\,A_i=ker\,A_j$，所以 $a_{ki}=a_{kj} \wedge b_{ki}=b_{kj}$。因此

$$t_{A_i}(x)=t_{A_j}(x) \wedge f_{A_i}(x)=f_{A_j}(x)$$

推论 1 设 T 是一个 t-模，S 是一个 t-余模，$\pi=\{A_i \mid i\in I\}$ 是 X 的一个 vague 划分，如果 $\forall i,j\in I$，$ker\,A_i=ker\,A_j$，那么 $A_i=A_j$。

定理 4 设 T 是一个 t-模，S 是一个 t-余模，一个由 X 上

的 vague 集组成的集合 $\pi=\{A_i | i\in I\}$是 X 上的一个 vague 划分的充要条件是 $k(\pi)=\{ker\ A | A\in\pi\}$是 X 的一个划分并且存在两常数序列$\{a_{ij}\}$，$\{b_{ij}\}$，$a_{ij}\in[0,1]$，$b_{ij}\in[0,1]$，$a_{ij}+b_{ij}\leqslant 1$，$i,j\in I$，使得如下条件成立：

(i) $(\forall i,j\in I)(\forall x\in ker\ A_j)(t_{A_i}(x)=a_{ij}\wedge f_{A_i}(x)=b_{ij}$；

(ii) $(\forall i\in I)(a_{ii}=1\wedge b_{ii}=0)$；

(iii) $(\forall i,j\in I)(a_{ij}=a_{ji}\wedge b_{ij}=b_{ji})$；

(iv) $(\forall i,j,k\in I)(T(a_{ik},a_{kj})\leqslant a_{ij}\wedge S(b_{ik},b_{kj})\geqslant b_{ij})$。

证明：必要性很容易由定义 9 和定理 2 得到。现在证明充分性。

因为 $k(\pi)=\{ker\ A | A\in\pi\}$是 X 的一个划分，所以 $\pi=\{A_i | i\in I\}$上的元素都是可形式化的 vague 集。为此，只需证明 $\pi=\{A_i | i\in I\}$是 X 的一个半 vague 划分就可以了。设 A_i，A_j，$A_k\in\pi$，$(i,j,k)\in I^3$。若 $i\neq j$，则 $ker\ A_i\cap ker\ A_j=\phi$。

$$C_t^T(A_i,A_k)=\sup_{x\in X}T(t_{A_i}(x),t_{A_k}(x))=\sup_{j\in I}T(a_{ij},a_{kj})$$

$$E_t^T(A_i,A_k)=\inf_{x\in X}\phi_T(t_{A_i}(x),t_{A_j}(x))=\inf_{l\in I}(\varphi_T(\max(t_{A_i}(x),t_{A_j}(x)),\min(t_{A_i}(x),t_{A_j}(x))=\inf_{l\in I}\varphi_T(\max(a_{il},a_{kl}),\min(a_{il},a_{kl}))$$

如果 $C_t^T(A_i,A_k)\leqslant E_t^T(A_i,A_k)$不成立，则存在 j 和 l 使得：

$$T(a_{ij},a_{kj})>\varphi_T(\max(a_{il},a_{kl}),\min(a_{il},a_{kl}))$$

从而有 $a_{il}\neq a_{kl}$（否则由上式得出 $T(a_{ij},a_{kj})>\varphi_T(\max(a_{il},a_{kl}),\min(a_{il},a_{kl}))=1$，这是一个矛盾）。为了讨论方便，不妨设 $a_{il}<a_{kl}$，则 $T(a_{ij},a_{kj})>\varphi_T(a_{kl},a_{il})$，于是有：

$$T(a_{kl},T(a_{ij},a_{kj}))>a_{il} \tag{3}$$

由条件(iv)，有：

$$T(a_{kl},T(a_{ij},a_{kj}))=T(a_{kl},T(a_{ij},a_{jk}))\leqslant T(a_{kl},a_{ik})\leqslant a_{il} \tag{4}$$

式(3)和式(4)是一个矛盾。因此 $C_t^T(A_i,A_k)\leqslant E_t^T(A_i,A_k)$。

另一方面，有：

$$C_f^S(A_i,A_k)=\inf_{x\in X}S(f_{A_i}(x),f_{A_k}(x))=\inf_{j\in I}S(b_{ij},b_{kj})$$

$$E_f^S(A_i,A_k)=\sup_{x\in X}\phi_S(f_{A_i}(x),f_{A_k}(x))=\sup_{l\in I}\phi_S(b_{il},b_{kl})=\sup_{l\in I}\varphi_S(\max(b_{il},b_{kl}),\min(b_{il},b_{kl}))$$

如果 $C_f^S(A_i,A_k)\geqslant E_f^S(A_i,A_k)$不成立，则存在 j 和 l 使得：

$$S(b_{ij},b_{kj})<\varphi_S(\max(b_{il},b_{kl}),\min(b_{il},b_{kl}))$$

从而有 $b_{il}\neq b_{kl}$（否则由上式得出 $S(b_{ij},b_{kj})<\varphi_S(\max(b_{il},b_{kl}),\min(b_{il},b_{kl}))=0$，这是一个矛盾）。不妨设 $b_{il}<b_{kl}$，则 $S(b_{ij},b_{kj})<\varphi_S(b_{kl},b_{il})$，于是有：

$$S(S(b_{ij},b_{kj}),b_{kl})<b_{il} \tag{5}$$

由条件(iv)，可得：

$$S(S(b_{ij},b_{kj}),b_{kl})=S(S(b_{ij},b_{jk}),b_{kl})\geqslant S(b_{ik},b_{kl})\geqslant b_{il} \tag{6}$$

式(5)和式(6)是一个矛盾，因此 $C_f^S(A_i,A_k)\geqslant E_f^S(A_i,A_k)$。综上所述，$\pi=\{A_i | i\in I\}$是 X 的一个半 vague 划分。

推论 2 设 T 是一个 t-模，S 是一个 t-余模，$\pi=\{A_i | i\in I\}$是 X 上的一个 vague 划分，那么定理 4 中相应的两常数序列$\{a_{ij}\}$，$\{b_{ij}\}$，$a_{ij}\in[0,1]$，$b_{ij}\in[0,1]$，$a_{ij}+b_{ij}\leqslant 1$，$i,j\in I$，可由如下式子来决定：

$$(\forall i,j\in I)(a_{ij}=C_t^T(A_i,A_j)=E_t^T(A_i,A_j)\wedge b_{ij}=C_f^S(A_i,A_j)=E_f^S(A_i,A_j)$$

证明：因为 $C_t^T(A_i,A_j)=\sup_{x\in X}T(t_{A_i}(x),t_{A_j}(x))=\sup_{k\in I}T(a_{ik},a_{kj})$，所以

$$a_{ij}=T(a_{ij},a_{jj})\leqslant C_t^T(A_i,A_j)=\sup_{k\in I}T(a_{ik},a_{jk})\leqslant\sup_{k\in I}a_{ij}=a_{ij}$$。类似地，由

$$C_f^S(A_i,A_j)=\inf_{x\in X}S(f_{A_i}(x),f_{A_j}(x))=\inf_{k\in I}S(b_{ik},b_{kj})$$，得：

$$b_{ij}=\inf_{k\in I}b_{ij}\leqslant\inf_{k\in I}S(b_{ik},b_{kj})\leqslant C_f^S(A_i,A_j)\leqslant S(b_{ij},b_{jj})=b_{ij}$$。

证毕。

从 vague 划分的定义可以看出，X 上的每个 vague 划分都与所考虑的 t-模 T，t-余模 S 密切相关，因此本文中的 vague 划分也称为(T,S)-vague 划分。

推论 3 设 t-模对(T_1,S_1)比(T_2,S_2)弱，如果 $\pi=\{A_i | i\in I\}$是X 上的一个(T_2,S_2)-vague 划分，那么 $\pi=\{A_i | i\in I\}$是 X 上的一个(T_1,S_1)-vague 划分。

证明：由定义 3 和定理 4 易证(略)。

结束语 Vague 集理论是传统模糊集理论的推广，具有传统模糊集理论所没有的三维属性的优点。本文系统地研究了半 vague 划分和 vague 划分，给出了半 vague 划分和 vague 划分的相关性质，这是对 vague 集理论的有益补充。在经典集及传统的模糊集理论中，划分与等价关系是一一对应的，试图建立 vague 划分和 vague 等价关系的一一对应关系自然是我们的兴趣，由于篇幅所限，将另文讨论。

参考文献

[1] Zadh. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965(8): 338-353

[2] Acampora G, Loia V. A proposal of ubiquitous fuzzy computing for Ambient Intelligence[J]. Information Sciences, 2008, 178: 631-646

[3] Lin F, Ying H, MacArthur R D, et al. Decision making in fuzzy discrete event systems[J]. Information Sciences, 2007, 177: 3749-3763

[4] Liu Y J, Wang W. Adaptive fuzzy control for a class of uncertain nonaffine nonlinear systems[J]. Information Sciences, 2007, 177: 3901-3917

[5] Mitchell H B. Pattern recognition using type-II fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2005, 170: 409-418

[6] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20: 87-96

[7] Gau W L, Buehrer D J. Vague Sets[J]. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 1993, 23: 610-614

[8] Bustince H, Burillo P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy sets and Systems, 1996, 79: 403-405

[9] Hung W L, Yang M S. Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets based on Hausdorff distance[J]. Pattern Recognition Letters, 2004, 25: 1603-1611

[10] Li D F, Cheng C T. New similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognitions[J]. Pattern Recognition Letters, 2002, 23: 221-225

11] De S K, Biswas R, Roy A R. An application of intuitionistic fuzzy sets in medical diagnosis[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 117: 209-213

[12] Deschrijver E, Kerre E. On the composition of intuitionistic fuzzy relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 136: 333-361

[13] Hung W L, Wu J W. Correlation of intuitionistic fuzzy sets by centroid method[J]. Information Sciences, 2002, 144: 219-225

[14] Alaca C, Turkoglu D, Yildiz C. Fixed points in intuitionistic fuzzy metric spaces[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 29: 1073-1078

[15] Demirci M. The generalized associative law in vague groups and its applications—I[J]. Information Sciences, 2006, 176: 900-936

[16] 胡宝清. 模糊理论基础[M]. 武汉：武汉大学出版社，2004