

基于粒子群算法的B样条曲线拟合

朱庆生 曾令秋 屈洪春 刘骥
(重庆大学计算机学院 重庆 400044)

摘要 图像边沿的曲线拟合对于目标对象的识别是十分重要的预处理步骤。针对目标边沿含有比较复杂的噪声的图像提出了一种基于多目标粒子群优化的算法,实现了曲线的快速平滑拟合。该算法利用建立辅助存储空间和保持解多样性的策略防止粒子群算法收敛过早;在边沿离散化采样时用分治与递归的搜索策略提高了B样条基函数节点参数选取的灵活度,从而实现了目标区域边沿的多分辨率插值拟合。实验证明该算法能够在较快实现曲线拟合的同时将目标区域边沿噪声去除,并能较好地实现图像三维重建预处理的需求。

关键词 曲线拟合,粒子群优化,B样条曲线,多目标优化,非劣最优解

中图分类号 TP391.41 **文献标识码** A

Curve Fitting of B-spline Based on Particle Swarm Optimization

ZHU Qing-sheng ZENG Ling-qiu QU Hong-chun LIU Ji
(College of Computer Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract Curve fitting plays very important role in preprocess of object recognizing. A particle swarm optimization (PSO) based multi-object optimization algorithm was proposed in this paper to implement the smoothness fitting quickly for image with complicated noise around the target-area. The external repository and strategy of diversity were employed to prevent the PSO from converging too quickly. Moreover, the search policy of split-and-merge made the selection of knots parameter more flexibly in B-spline bases computation while getting the discrete control points set of the target area. Therefore, curve fitting can be achieved by the multi-resolution interpolation. As shown in experiments, this algorithm can get the approximation curve quickly, eliminate the noise from the target-area, and satisfy the requirement of image based 3-D reconstruction as well.

Keywords Curve fit, Particle swarm optimization, B-spline curves, Multi-object optimization, Pareto optimal

物体轮廓线的平滑提取在图像处理、模式识别、计算视觉等领域是一个重要的研究课题。图像在数据采集过程中受到噪声和采样条件影响时,物体的轮廓就会产生失真的现象。因此在对图像进行分析和理解之前就必须重建轮廓线,而且要求尽可能降低重建曲线与原始曲线之间的误差。

在重建时曲线被分割成许多段,每一段由分析曲线构成。分析曲线可分为3类:线段、圆弧和高阶连续可导的曲线。给定空间数字曲线 C ,由 n 个有序的空间点 $P_i (i=1, \dots, n)$ 组成, $C = \{P_i = \{x_i, y_i\}, i=1, \dots, n\}$,如果同时给定分段的顶点数 m 。从给定的 n 个点中选择 m 个控制点拟合曲线,有 $C_n^m = n! / (m! * (n-m)!)$ 种选择的方法。而且只有保持点的先后次序关系的选择方法才是一个可行解,因此该问题是一个NP难问题,在多项式时间里不能求出最优解。

多边形拟合是用线段将控制点连接起来,并使得逼近多边形和给定曲线之间的距离均方差最小。这是一种最简单且常用的表示轮廓线方法^[1],在此基础上许多算法^[2]进行了改进并提高了效率。但多边形拟合法并不适合于所有的曲线,

特别是要求轮廓平滑的曲线。利用圆弧来拟合曲线^[3]取得了较好的效果,但计算复杂性较高。J. H. Horng^[4]和B. Sarkar^[5]分别采用动态规划和遗传学算法将多边形和圆弧方法进行结合,一定程度上提高了拟合性能。与此同时许多算法^[6,7]利用进化算法(如遗传学算法)和高阶连续可导的曲线(如Bézier曲线或B样条曲线)相结合来实现曲线拟合。

以上提及的拟合曲线的方法有些计算十分耗时;有些方法要求有一些先验知识的支撑,如轮廓线方法;有些方法的控制参数的确定较复杂,如纯B样条曲线拟合。粒子群优化算法(particle swarm optimization PSO)是由Kennedy和Eberhart于1995年提出的一种优化算法^[8],由于其容易理解、易于实现,在许多优化问题中得到成功应用,并且很多情况下要比遗传算法更有效率。本文提出了一种基于多目标粒子群优化的算法,从而实现了曲线的快速平滑拟合。过程中先对控制点的选取采用多目标优化,然后用多分辨率B样条曲线进行插值,从而使得拟合曲线既能较好地逼近原始轮廓线又能够达到平滑的效果。

到稿日期:2008-11-25 返修日期:2009-03-02 本文受国家863计划项目(2006AA10Z233)和国家自然科学基金项目(60773082)资助。

朱庆生(1956-),男,教授,博士生导师,研究方向为图像处理、虚拟现实、Web智能等;曾令秋(1975-),男,博士生,讲师,研究方向为人工智能与计算机图形图像处理。

1 问题定义

1.1 多目标优化问题

通常一个多目标优化问题^[9]可以表示如下:

$$\min y=f(x)=(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)) \quad (1)$$

$$s. t. g_i(x) < 0 \quad (2)$$

其中, 决策向量 $x \in R^m$, 目标向量 $y \in R^n$, $f_i(x), i=1, 2, \dots, k$ 是目标函数, $g_i(x) < 0$ 是系统约束。

在大多数情况下, 各个目标函数间可能是冲突的。这就使得多目标优化问题不存在惟一的全局最优解, 使所有目标函数同时最优。但是, 可以存在这样的解: 对一个或几个目标函数不可能进一步优化, 而对其他目标函数不至于劣化, 这样的解称之为非劣最优解(Pareto optimal)。

定义 1 向量 $U=(u_1, \dots, u_n)$ 支配于向量 $V=(v_1, \dots, v_n)$, 当且仅当 U 是部分小于 V , 表示为 $U < V$, 即 $\forall i \in \{1, \dots, n\}: u_i \leq v_i \wedge \exists i \in \{1, \dots, n\}: u_i < v_i$

定义 2 若 x^* 是搜索空间中一点, 说 x^* 为非劣最优解可有如下定义:

$$x^* = \{x \in R^m \mid \neg \exists x' \in R^m f_i(x') < f_i(x^*)\}$$

定义 3 由所有非劣最优解组成的集合称为多目标优化问题的最优解集(Pareto optimal set), 也称为可接受解集或有效解集。

1.2 控制点选取问题

目标 1 数字曲线 $C = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, 是首尾相连的(即 P_n 的后继点是 P_1)。定义弧 $\widehat{p_i p_j}$ 是从曲线 C 中截取的一段连续的点集合 $F = \{P_i, P_{i+1}, \dots, P_j\}$; 而弦 $\overline{p_i p_j}$ 是连接 P_i 和 P_j 的线段。则弦 $\overline{p_i p_j}$ 逼近弧 $\widehat{p_i p_j}$ 的误差用弧上每个点到弦的距离和来表示, 定义为:

$$e(\widehat{p_i p_j}, \overline{p_i p_j}) = \sum_{k=i}^j \frac{(y r_k - a x r_k - b)^2}{a^2 + 1} \quad (3)$$

其中, a, b 是直线 $\overline{p_i p_j}$ 所确定的直线方程 $y = ax + b$ 中的参数。从曲线 C 中选取 m 个分段控制点集 $Se = \{X_{p_1}, X_{p_2}, \dots, X_{p_m}\}$, 其中 $3 \leq m \leq n$ 且 $Se \subset C$, 则总的逼近误差可记为 $E = \sum_{i=1}^m e(\widehat{p_i p_j}, \overline{p_i p_j})$ 。因此分段逼近问题最优解就可以定义为:

$$\min_{Se \subset C} |Se| \quad \text{且 } 3 \leq |Se| \leq n \text{ 和 } E \leq \epsilon_1 \quad (4)$$

其中, $|Se|$ 表示 Se 的候选解, ϵ_1 是逼近误差的容许限度值。

目标 2 定义函数 $f_c = m$, 其中 m 是从曲线 C 中选取的分段控制点的个数, 因此控制点个数最少的问题可以有如下定义:

$$\min_{Se \subset C} |f_c| \quad \text{且 } 3 \leq |f_c| \leq n \quad (5)$$

目标 3 定义角度 θ_i 是直线 $\overline{x_{p_i} x_{p_{i+1}}}$ 和 $\overline{x_{p_{i+1}} x_{p_{i+2}}}$ 的夹角, 且 $X_{p_i}, X_{p_{i+1}}, X_{p_{i+2}} \in Se$ 。分段拟合曲线的平滑度记为 $SM = \sum_{i=1}^{1+m/2} \cos \theta_i$, 则分段拟合曲线平滑度问题最优解就可以有如下定义:

$$\min_{Se \subset C} |SM| \quad \text{且 } 3 \leq |Se| \leq n \text{ 和 } SM \leq \epsilon_2 \quad (6)$$

其中, $|SM|$ 表示 SM 的候选解, ϵ_2 是平滑的容许限度值。

2 算法

2.1 B样条曲线原理简介

B样条曲线具有 Bezier 曲线的一切优点, 克服了 Bezier

曲线不具备局部修正的缺点^[5]。B样条曲线方程为:

$$p(u) = \sum_{i=0}^{p-1} d_i N_{i,K}(u) \quad (7)$$

其中, $d_i (i=0, 1, \dots, p-1)$ 为采样集合 S 中的点, $N_{i,K}(u)$ 是基函数, 该基函数的 K 次定义如下:

$$\begin{cases} N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\ N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \\ \text{规定 } \frac{0}{0} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中, $u_i (i=0, 1, \dots, p-1)$ 是对应于给定数据点的节点参数, 为了方便计算, 一般用累计弦长来表示, 但这样拟合精度不高, 通常需要增加采样点个数^[6]。

2.2 PSO 算法原理简介

在 PSO 中, 每个优化问题的解都是搜索空间中的一只鸟, 称之为粒子(Particle)。所有的粒子都有一个由优化的函数决定的适应度值, 每个粒子还有一个速度决定它们飞翔的方向和距离。PSO 初始化为一群随机粒子, 然后, 粒子们就追随当前的最优粒子在解空间中搜索找到最优解。在每一次迭代飞跃中, 粒子通过跟踪两个“极值”来更新自己。粒子的位置可表示为 X_i , 它所经历过的最好位置记为 $pBest[i]$, 它的速度用 V_i 表示, 群体中最好粒子的位置的索引号用 g 表示。粒子根据如下公式来更新自己的速度和位置:

$$v_i = v_i + c_1 \times r_1 \times (pBest[i] - x_i) + c_2 \times r_2 \times (pBest[g] - x_i) \quad (9)$$

$$x_i = x_i + v_i \quad (10)$$

其中, w 为惯性权重, r_1, r_2 是介于 $(0, 1)$ 之间的随机数, c_1, c_2 是学习因子(或者称为加速度系数)。

2.3 粒子和适应度函数的定义

获取 B样条曲线插值所需的控制点的过程就是从包含 n 个点的曲线 C 中选取 m 个分段控制点集 Se 的过程, 因此可以用一个二进制的向量来构造粒子: $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ 且满足条件:

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} \geq 3 \text{ 和 } X_{ij} \in \{0, 1\} \quad (11)$$

当 $X_{ij} = 1$ 时表明曲线 C 中对应位置顶点被选入了控制点集 Se , 当 $X_{ij} = 0$ 时则相反。而适应度函数 $y = f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$ 的定义则根据式(4), 式(5)和式(6), 即: $f_1(x) = E, f_2(x) = f_c, f_3(x) = SM$ 。

2.4 多目标 PSO 算法

虽然 PSO 算法在许多单目标优化问题中的成功应用说明了 PSO 算法的有效性, 但由于多目标优化问题和单目标优化问题有本质区别, 且 PSO 算法中信息是由最好的粒子给出的, 其他个体跟着最好粒子快速向一点收敛, 因此直接用 PSO 算法处理多目标优化问题, 将很容易收敛于非劣最优域的局部区域。基于上述问题, 本文提出了基于多目标粒子群优化的算法。该算法利用建立辅助存储空间和保持解多样性的策略防止粒子群算法收敛过早; 在边沿离散化采样时用分治与递归的搜索策略提高了 B样条基函数节点参数选取的灵活性, 从而实现了目标区域边沿的多分辨率插值拟合。

策略 1 通过建立辅助存储空间^[10]保存粒子群的历史非劣最优解, 并计算最优解之间的距离保持解的多样性以防止

过早收敛。每次迭代过程中需要对辅助存储空间中非劣最优解进行更新,更新的原则有两个:支配性的比较和解分布的状况的比较。首先将扫描粒子群中当前非劣最优解 CS 与辅助存储空间已有的解集 S 中的每个元素按照支配性的定义进行比较,可以分为图 1 中的 4 种情况;如果是满足支配性条件的解,再与集合 S 中的元素计算距离值,如果大于 ϵ_d 才插入辅助存储空间。距离的定义如下:

$$dist = \sum_{j=1}^D \left(\frac{f_j(CS) - f_j(S_i)}{\max(f_j(S_i)) - \min(f_j(S_i))} \right)^2 \quad (12)$$

其中, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ 是适应度函数值。

策略 2 在更新每个粒子的适应度函数时,采用分治与递归的思想在粒子所在的解空间附近进行搜索,选出满足非劣特性的新解。在分治调整阶段,对相邻两个控制点间加入一个新的控制点,如果仍然满足非劣特性,即改变该在粒子向量 X_i 的对应位置值,并重新计算适应度函数值;而整合阶段在满足非劣特性的基础上合并相邻的弦。这样使得在曲线变化平缓的区域选取的控制点数较少,而变化剧烈区域控制点数较多。在用 B 样条曲线插值时,即便使用弦长来表示节点参数 u_i ,也能达到较好的精度^[6],从而实现了多分辨率 B 样条曲线插值。

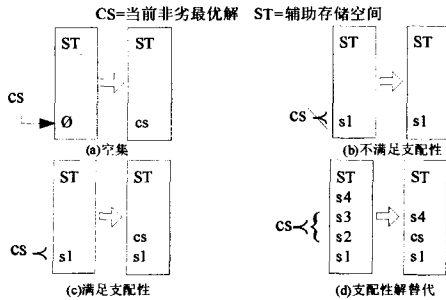


图 1 辅助存储空间更新示意图

2.5 曲线拟合算法流程

1) 初始化粒子群,给定群体规模 N ,随机生成粒子的位置向量:

```
For  $i=1$  to  $N$ 
     $X_i = \text{Rand}()$ ;
     $V_i = 0$ ;
```

2) 用目标函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 和 $f_3(x)$ 分别计算每个粒子的适应度值;

3) 建立保存粒子群的历史非劣最优解的仓库 store;

4) 建立与 store 中保存的解向量 store[h] 相对应的超立方体搜索空间,其坐标分别是解向量 X 、适应度函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 和 $f_3(x)$;

5) 初始化每个粒子的个体极值,同时更新仓库 store;

```
For  $i=1$  to  $N$ 
     $pBest[i] = X_i$ ;
```

6) while 没有达到最大迭代次数(可以根据曲线实际点数来确定)

Do

a) 从 store 中随机取得的最优解向量作为 $pBest[g]$ 代入式(9)和式(10)计算每个粒子的速度和位置,

b) 利用策略 1 更新仓库 store 中粒子群和搜索空间,

c) 用目标函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 和 $f_3(x)$ 分别计算每个粒子

的适应度值,并利用策略 2 对粒子附近的解空间进行搜索,调整粒子对应的位置向量 X_i ;

d) 更新群体中的每个粒子的个体极值,如果当前位置向量 $X_i < pBest[i]$,就有 $pBest[i] = X_i$;

end while

7) 非劣最优解集 store(插值所需的后选控制点集)中的元素个数不止一个,因此引入效用函数来为选取的标注,其定义如下:

$$U(f(x)) = U(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = \sum_{j=1}^3 w_j \times f_j(x_i) \quad (13)$$

其中, $f(x)$ 是适应度函数; X_i 是非劣最优解集中的元素; W_j 是效用权重,可以用来调解适应度目标的参数,这样本算法就适用于不同类型的图像,如某些曲线拟合要求足够的平滑,则可以适当提高平滑目标函数所对应的权重,具体叙述见如下的实验与分析。将 store 中的元素依次代入式(13),得到效用最好的 X_{max} 。最后利用 X_{max} 查表得到控制点集代入式(7)和式(8)计算 B 样条曲线的节点参数并进行多分辨率插值。

3 实验及分析

实验 1 超声图像是回波经过转换的图像,图像信噪比低,如图 2(a)所示;直接提取的目标区域边沿有许多的毛刺,如图 2(b)所示。在本算法式(9)和式(10)中, $c_1 = c_2 = 0.5$,为了有效抑制噪声在设置效用权重时向平滑目标倾斜,根据式(4)、式(5)、式(6)和式(13), $U(f(x)) = 0.3 * E + 0.5 * SM + 0.2 * f_c$,输出的结果如图 3 的(a)、(b)所示。如表 1 所列,从 3 个方面对本文算法和文献[6]算法进行了比较(迭代次数相同的前提下),在逼近度方面稍差一些,但在光滑度和采样控制点数方面就要强许多。原因是针对这类图像信噪比低的图像,希望得到比较光滑的边沿,因此提高了对应的效用权重,以便于进行后续处理,例如三维重建效果,如图 4 所示。

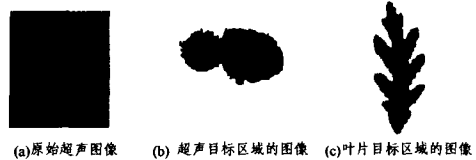


图 2 待处理的图像

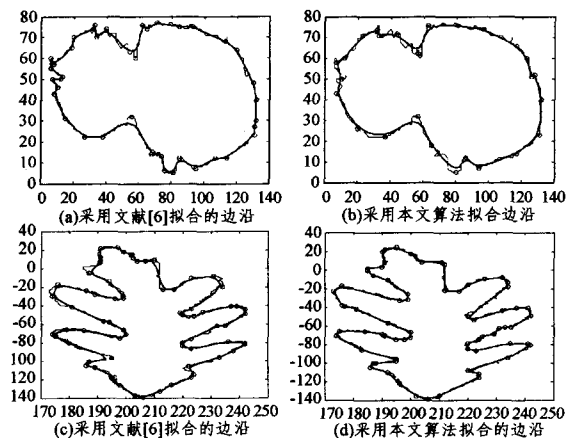


图 3 曲线拟合结果比较

就能实现其输入。(2)字元提取规范,码元设计简易,其易学易用性好。(3)编码规整简短,键位设计科学合理,分布均匀,其操作简便输入快捷。

结束语 综上所述,双码三笔汉字输入法编码技术易学易用、快速规范,很好地解决了“易学的打不快,快速的太难学”问题。它比五笔字型输入法易学,比拼音输入法快捷,同时也很好地地将音码输入和形码输入融合,让会写不会读、会写又会读和会读不会写的用户无需切换输入方式就能轻松、快速地完成输入,很好地满足了用户需求。

(上接第 291 页)

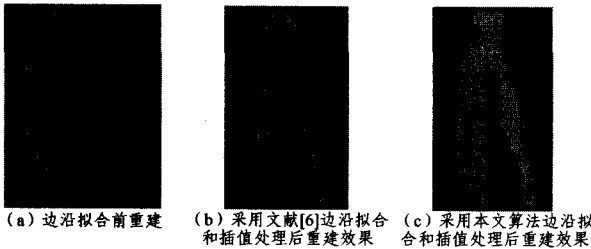


图 4 超声图像三维重建效果

表 1 算法的对比

	逼近度	光滑度	采样控制点数	迭代次数
本文	242.4	21.4	26	1.8×10^3
文献[6]	182.8	32.8	40	1.8×10^3

(曲线原有点数=391)

实验 2 针对有些图像,如图 2(c)所作的处理,希望尽可能地逼近原始图像,这时设置效用权重向逼近度目标倾斜, $U(f(x))=0.5 * E+0.3 * SM+0.2 * f_i$,输出的结果如图 3 的(c)、(d)所示。如表 2 所列,本文的算法在 3 个方面都比文献[6]算法好。

表 2 算法的对比

	逼近度	光滑度	采样控制点数	迭代次数
本文	268.7	30.4	72	3.8×10^3
文献[6]	308.6	38.1	73	3.8×10^3

(曲线原有点数=571)

结束语 本文针对分段拟合数字曲线的 NP 难问题,提出了基于粒子群的搜索算法来确定 B 样条曲线插值所需的控制参数。算法中采用了多目标优化的优化策略,从而使得所拟合的曲线既能较好地逼近原始轮廓线又能够达到平滑的效果。同时通过建立辅助存储空间来保存粒子群的历史非劣最优解,并计算最优解之间的距离来保持解的多样性以防止粒子群算法的过早收敛;采用分治与递归的思想调整了粒子的内部结构,提高了计算 B 样条曲线节点参数的灵活度,实现了多分辨率插值。最后还引入效用函数来建立对非劣最优解集中元素的评估机制,使得算法可以灵活应对各类图像的处理需求。实验证明该算法能够在较快实现曲线拟合的同时

参考文献

- [1] 段曙东. 中文输入法软件产品质量监督抽查结果[N]. 中国质量报,2007-10
- [2] 张寿萱,徐建毅,张建生. 中文信息的计算机处理[M]. 北京:宇航出版社,1984
- [3] 王力德. 汉字编码的普及目标体系与编码实例[J]. 中文信息学报,1993,8(4)
- [4] 陈一凡,张鹿. 键位相关速度当量的研究[J]. 中文信息学报,1990(9)

将目标区域边沿噪声去除,并对后续的三维重建工作起到十分积极的作用。

参考文献

- [1] Teh C H, Chin R T. On the detection of dominant points on digital curves[J]. IEEE Pattern Anal. Mach. Intell, 1989(11): 859-872
- [2] 茹少峰,周明全,耿国华. 基于遗传算法的多边形逼近 3D 数字曲线[J]. 计算机辅助设计与图形学学报,2004,16(4):503-507
- [3] Pei S-C, Horng J-H. Fitting digital curves using circular arcs [J]. Pattern Recognition,1995(28):107-116
- [4] Horng J H, Li J T. A dynamic programming approach for fitting digital planer curves with line segments and circular arcs[J]. Pattern Recognition Lett,2001(22):183-197
- [5] Sarkar B, Singh L K, Sarkar D. Approximation of digital curves with line segments and circular arcs using genetic algorithms [J]. Pattern Recognition Lett,2003(24):2585-2595
- [6] 周明华,汪国昭. 基于遗传算法的 B 样条曲线和 Bézier 曲线的最小二乘拟合[J]. 计算机研究与发展,2005,42(1):133-143
- [7] Pal S, et al. Cubic Bézier approximation of a digitized curve[J]. Pattern Recognition,2007,doi:10.1016/j.patcog.2007.01.019
- [8] Kennedy J, Eberhart R C. Particle Swarm Optimization[C]// Proc. IEEE Int. Conf. Neural Networks. vol. 4, Dec. 1995:1942-1948
- [9] Coello C A. A Comprehensive survey of evolutionary - based multi-objective optimization [J]. Techniques Knowledge and Information Systems,1999,1(3):269-308
- [10] Knowles J D, Corne D W. Approximating the nondominated front using the Pareto archived evolution strategy[J]. Evolutionary Computation,2000,8:149-172
- [11] 黄贤英,张丽芳. 基于粒子群优化的模糊聚类算法[J]. 重庆工学院学报:自然科学版,2008,22(11):120-123