P_4^* 中保四元正则可离关系最小覆盖之确定

周小强[1] 刘任任[2]

（湖南理工学院数学系 岳阳 414006）[1] （湘潭大学信息工程学院 湘潭 411105）[2]

摘 要 根据部分 K 值逻辑的完备性理论、正则可离关系以及准完备集之间的相似关系理论，对部分四值逻辑中最小覆盖的确定进行分析，定出了部分四值逻辑中保四元正则可离关系函数集之最小覆盖成员。

关键词 多值逻辑，正则可离关系，Sheffer 函数，最小覆盖

中图法分类号 TP301 **文献标识码** A

Decision on Minimal Covering of Preserving Quaternary Regularly Separable Relations in Partial Four-valued Logic

ZHOU Xiao-qiang[1] LIU Ren-ren[2]

(Department of Mathematics, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang 414006, China)[1]

(College of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)[2]

Abstract According to the completeness theory in partial K-valued logic, regularly separable relation and the similar relationship theory among precomplete sets, the decision of minimal covering in partial four-valued logic was analyzed, and the minimal covering members of function sets preserving quaternary regularly separable relations in partial four-valued logic were decided.

Keywords Multi-valued logic, Regularly separable relation, Sheffer function, Minimal covering

多值逻辑是计算机科学中的一个重要分支，随着计算机科学与技术的不断进步，多值逻辑得到了前所未有的发展，其研究内容虽多，但大体上可分理论、电路与系统、应用 3 个方面。在多值逻辑完备性理论中，Sheffer 函数的判定和构造是一个基本而重要的问题，此问题的解决依赖于定出多值逻辑函数集中的所有准完备集，并可归结为定出所有准完备集的最小覆盖。对于完全多值逻辑中 sheffer 函数的判定问题已由 Schofield[1] 和 Kudrjavcev[2] 等完全解决。在部分多值逻辑 sheffer 函数判定与构造的研究中，刘任任教授利用准完备集的相似关系，简捷地定出了部分三值逻辑中准完备集之最小覆盖[3]，并对于一般的 K，证明了 $T_E, P_K\cup\{*\}, L_P, L_{G_{4,2}}$ 4 类函数集在最小覆盖中必出现[4,5]。而其它 3 类函数集，即完满对称函数集 $F_{S,m}$、单纯可离函数集 $S_{I,m}$、正则可离函数集 $S_{R,m}$，由于结构复杂，其是否在最小覆盖中出现的问题只取得了部分结果[6-9]，还未得到彻底解决。

本文根据准完备集之间的相似关系理论，证明了 22 类 42 个保四元正则可离关系函数集必是部分四值逻辑的最小覆盖成员。

1 基本定义

设 $E_k=\{0,1,\cdots,K-1\}$，$K\geqslant 2$，E_k 上的完全和非完全 K 值逻辑函数统称为部分多值逻辑函数，所有部分 K 值逻辑函数作成的集合记为 P_k^*。

函数 $f(x_1,\cdots,x_n)(\in P_K^*)$ 说是一个 sheffer 函数，如果 f 能叠合出 P_K^* 中的所有函数。

定义 1 设 $G_m=G_m(R_1,\cdots,R_m)\cup G_m^*$，$H$ 是 $G_m(R_1,\cdots,R_m)$ 的对称群，$G_m^*=\bar{G}_m\cup\bar{G}_m^{\sigma_1}\cup\cdots\cup\bar{G}_m^{\sigma_{h-1}}$，其中：$R_1=\{1,\cdots,r_1\}$，$R_2=\{r_1+1,\cdots,r_2\}$，$\cdots$，$R_n=\{r_{n-1}+1,\cdots,r_n\}$。

G_m 说是正则可离的，如果存在 E_k 的一组直接分划 D_i：$E_k=A_1^{(i)}+\cdots+A_m^{(i)}$，$i=1,\cdots,n$，使得对任意 $\langle a_1,\cdots,a_m\rangle\in\bar{G}_m$，必有一个具有下列性质的直接分划 $D_h(1\leqslant h\leqslant n)$：$a_i\in A_i^{(h)}$，$i=1,\cdots,m$，且对任意的 D_j，$1\leqslant j\leqslant h-1$，有 $A_{j_1}^{(j)},\cdots,A_{j_n}^{(j)}(1\leqslant j_1,\cdots,j_n\leqslant m)$ 使 $a_1,\cdots,a_{r_1}\in A_{j_1}{}^{(j)},\cdots,a_{r_{n-1}+1},\cdots,a_{r_n}\in A_{j_n}{}^{(j)}$。

若 G_m 正则可离，则称 $T(G_m)$ 为保正则可离函数集，并记为 $S_{R,m}$。

在上面定义中所提到的 $\bar{G}_m$ 都仅含 m 元不同的序列。子群 $H=\{e,\sigma_1,\cdots,\sigma_{h-1}\}\subseteq S_m$（或 S_4）。

定义 2 令 $\Sigma=\{A_i\mid A_i(\subset P_K^*)$ 是准完备集，$i=1,\cdots,n\}$，且 $\Sigma'\subseteq\Sigma$，定义 $S_{\Sigma'}=\{f\in P_K^*\mid\exists A'_j\in\Sigma'$ 使得 $f\in A'_j,1\leqslant j\leqslant n\}$，即 $S_{\Sigma'}$ 表示 P_K^* 中所有属于 Σ' 中某个准完备集的函数之集合。也即 $S_{\Sigma'}=A'_1\cup A'_2\cup\cdots\cup A'_n$，$A'_j\in\Sigma'$，$|\Sigma'|=n$，$j=1,\cdots,n$。

到稿日期：2008-10-15 返修日期：2008-12-30 本文受国家自然科学基金(606731931)，湖南省教育厅重点项目(07A067)，湖南省教育厅项目(08C390)资助。

周小强(1976－)，男，硕士，讲师，主要研究方向为多值逻辑等，E-mail：zxq0923@163.com；刘任任(1959－)，男，博士，教授，主要研究方向为多值逻辑等。

集合 $\Sigma'(\subset\Sigma)$ 是集合 Σ 的覆盖，如果满足 $S_{\Sigma'}=S_{\Sigma}$。覆盖 Σ' 是最小的，如果 Σ' 的任何一个真子集都不是集合 Σ 的覆盖。

定义 3 关系 G_m 与 G_m' 说是相似的，如果 $|G_m|=|G_m'|$ 且存在一个双射 $\varphi:E_k\to E_k$ 使得 $G_m'=\{\langle\varphi(a_1),\cdots,\varphi(a_m)\rangle \mid \langle a_1,\cdots a_m\rangle\in G_m\}$。

显然，相似关系是一个等价关系，用 $G_m\overset{\varphi}{\sim}G_m'$ 来表示 G_m 与 G_m' 在双射 φ 下相似。

2 主要结果及其证明

定理 部分四值逻辑中保四元正则可离关系 G_4 的准完备集 $T(G_4)$ 共有 42 个属于最小覆盖的成员，按相似关系分为 22 类。其中 $G_4=G_4(R_1,R_2)\cup G_4^*$。根据 R_1,R_2 的取值分两种情况：

I. 当 $R_1=\{1,2\},R_2=\{3,4\}$ 时，$G_4=G_4(\{1,2\},\{3,4\})$ 的对称群有 10 个。其中 $G_4(\{1,2\},\{3,4\})=\{\langle0,0,1,1\rangle,\langle0,0,2,2\rangle,\langle0,0,3,3\rangle,\langle1,1,2,2\rangle,\langle1,1,3,3\rangle,\langle2,2,3,3\rangle\}$，不同对称群对应的 10 类 G_4^* 如下：

$\{\langle0,1,2,3\rangle\}^{H_i}\sim\{\langle2,1,0,3\rangle\}^{H_i}\sim\{\langle3,1,2,0\rangle\}^{H_i}$，$i=1,\cdots,10$。其中(1) $H_1=\{e\}$；(2) $H_2=\{e,(12)\}$；(3) $H_3=\{e,(34)\}$；(4) $H_4=\{e,(12)(34)\}$；(5) $H_5=\{e,(13)(24)\}$；(6) $H_6=\{e,(14)(23)\}$；(7) $H_7=\{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$；(8) $H_8=\{e,(1324),(1423),(12)(34)\}$；(9) $H_9=\{e,(12),(34),(12)(34)\}$；(10) $H_{10}=\{e,(12),(34),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(1324),(1423)\}$。

II. 当 $R_1=\{1,2,3,4\}$ 时，$G_4=G_4(\{1,2,3,4\})$ 的对称群有 12 个。其中 $G_4(\{1,2,3,4\})=\{\langle0,0,0,0\rangle,\langle1,1,1,1\rangle,\langle2,2,2,2\rangle,\langle3,3,3,3\rangle\}$，不同对称群对应的 12 类 G_4^* 为：$\{\langle0,1,2,3\rangle\}^{H_i}$，$i=11,\cdots,22$。其中(11) $H_{11}=\{e,(12)(34)\}$；(12) $H_{12}=\{e,(13)(24)\}$；(13) $H_{13}=\{e,(14)(23)\}$；(14) $H_{14}=\{e,(1234),(1432),(13)(24)\}$；(15) $H_{15}=\{e,(1243),(1342),(14)(23)\}$；(16) $H_{16}=\{e,(1324),(1423),(12)(34)\}$；(17) $H_{17}=\{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$；(18) $H_{18}=\{e,(12),(34),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(1324),(1423)\}$；(19) $H_{19}=\{e,(13),(24),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(1234),(1432)\}$；(20) $H_{20}=\{e,(14),(32),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(1243),(1342)\}$；(21) $H_{21}=\{e,(123),(124),(132),(134),(142),(143),(234),(243),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$；(22) $H_{22}=S_4$。

证明：根据准完备集相似关系的性质，相似的两个准完备集要么同属于最小覆盖，要么同不属于最小覆盖，且相似关系是一个等价关系。因此，只需从以上 22 类中各取其中一个（以下均取第一个）G_4^* 来证明保此关系的准完备集不含于其它 270 个准完备集的任何一个中，即可证明此类相似关系函数集均为最小覆盖的成员。下面按类分别进行证明。

（一）第一类：取 $G_4^*=\{\langle0,1,2,3\rangle\}$。设 $\tilde{a}^i=(a_1^i,\cdots,a_n^i)$，$i=1,\cdots,m$，保 G_m。令 $f(\tilde{a}^i)=\beta_i$，$i=1,\cdots,m$。对于 $T(G_4)$，其中 $G_4=G_4(\{1,2\},\{3,4\})\cup G_4^*=\{\langle0,0,1,1\rangle,\langle0,0,2,2\rangle,\langle0,0,3,3\rangle,\langle1,1,2,2\rangle,\langle1,1,3,3\rangle,\langle2,2,3,3\rangle,\langle0,1,2,3\rangle\}$，构造函数 $f(x,y,z)$ 如下：

$$f(x,y,z)=\begin{cases}0,(x,y,z)=(3,3,3),(2,2,2),(3,1,3),(2,3,3),(1,3,1);\\1,(x,y,z)=(0,1,0),(3,2,2),(0,3,3);\\2,(x,y,z)=(0,0,0),(1,1,1),(3,1,0),(1,3,2),(1,2,3);\\3,(x,y,z)=(2,0,2),(0,2,0),(0,0,1)(2,1,1);\\*,\quad\text{其它情况。}\end{cases}$$

显然，对 $\forall\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\rangle,\langle\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\rangle,\langle\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\rangle\in G_4$，且 $(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)\in f(x,y,z)$ 的定义域，$i=1,2,3,4$ 有 $\langle f(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1),f(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2),f(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3),f(\alpha_4,\beta_4,\gamma_4)\rangle=\langle\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4\rangle$，经分析，所有的 $\langle\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4\rangle$ 都属于 G_4，由保关系的定义知 $f(x,y,z)\in T(G_4)$。

下证 $f(x,y,z)$ 不属于 7 类准完备集中的其它 270 个准完备集。根据准完备集的分类进行证明。

(1) 对于保 E 函数集：由 f 的定义可知 $f\notin T_E$，$\phi<E<E_4$。

(2) 对于完满对称函数集 $F_{s,m}$：

①由 $\langle f(0,0,0),f(0,1,0)\rangle=\langle3,2\rangle$；$\langle f(0,0,0),f(2,0,2)\rangle=\langle3,0\rangle$；$\langle f(0,0,0),f(0,3,0)\rangle=\langle3,1\rangle$；$\langle f(1,2,1),f(2,2,2)\rangle=\langle2,3\rangle$；$\langle f(2,2,2),f(3,3,3)\rangle=\langle3,0\rangle$；$\langle f(0,1,0),f(0,0,0)\rangle=\langle1,2\rangle$；$\langle f(3,3,3),f(0,1,0)\rangle=\langle0,2\rangle$；$\langle f(3,3,3),f(0,3,0)\rangle=\langle0,1\rangle$；可知 $f\notin F_{S,2}$。

②由 $\langle f(2,0,2),f(0,1,0),f(0,0,0)\rangle=\langle0,2,3\rangle$；$\langle f(3,3,3),f(0,3,0),f(0,0,0)\rangle=\langle0,1,3\rangle$；$\langle f(0,3,0),f(0,1,0),f(1,1,1)\rangle=\langle1,2,3\rangle$；$\langle f(3,3,3),f(0,3,0),f(0,1,0)\rangle=\langle0,1,2\rangle$；可知 $f\notin F_{S,3}$。

③由 $\langle f(3,3,3),f(0,3,0),f(0,1,0),f(2,2,2)\rangle=\langle0,1,2,3\rangle$ 可知 $f\notin F_{S,4}$。

(3) 对单纯可离函数集 $S_{I,m}$：

①由 $\langle f(0,0,0),f(1,1,1)\rangle=\langle3,3\rangle$；$\langle f(0,0,0,f(2,2,2)\rangle=\langle3,3\rangle$；$\langle f(0,3,0),f(3,0,3)\rangle=\langle1,3\rangle$；$\langle f(1,1,1),f(2,2,2)\rangle=\langle3,3\rangle$；$\langle f(1,1,1),f(3,3,3)\rangle=\langle3,0\rangle$；$\langle f(2,2,2),f(3,3,3)\rangle=\langle3,0\rangle$；$\langle f(0,3,0),f(3,1,3)\rangle=\langle1,2\rangle$；可知 $f\notin S_{I,2}$。

②由 $\langle f(0,0,0),f(1,1,1),f(2,2,2)\rangle=\langle3,3,3\rangle$；$\langle f(0,0,0),f(1,1,1),f(3,3,3)\rangle=\langle3,3,0\rangle$；$\langle f(0,0,0),f(2,2,2),f(3,3,3)\rangle=\langle3,3,0\rangle$；$\langle f(1,1,1),f(2,2,2),f(3,3,3)\rangle=\langle3,3,0\rangle$；知 $f\notin S_{I,3}$。

③由 $\langle f(0,0,0),f(1,1,1),f(2,2,2),f(3,3,3)\rangle=\langle3,3,3,0\rangle$，可知 $f\notin S_{I,4}$。

(4) 对除 $G_4=\{\langle0,0,1,1\rangle,\langle0,0,2,2\rangle,\langle0,0,3,3\rangle,\langle1,1,2,2\rangle,\langle1,1,3,3\rangle,\langle2,2,3,3\rangle,\langle0,1,2,3\rangle\}$ 外的 125 个正则可离函数集 $S_{R,m}$：

①由(2)中的①可知 $f\notin S_{R,2}$。

②由(3)中的②以及 $\langle f(1,0,2),f(0,1,2),f(2,2,2)\rangle=\langle0,1,3\rangle$；$\langle f(1,02),f(1,1,1),f(1,2,0)\rangle=\langle0,3,0\rangle$；$\langle f(0,0,0),f(1,0,2),f(2,0,1)\rangle=\langle3,0,1\rangle$；$\langle f(0,1,2),f(1,2,0),f(2,0,1)\rangle=\langle1,0,1\rangle$；可知 $f\notin S_{R,3}$。

③由(3)中的③可知 $f\notin S_{R,4}$。

(5) 对 4 个 L 型函数集 $L_{G_{4,2}}$：

（下转第 192 页）

D12	—	—	42	1.23
D13	—	—	26	0.12
D14	—	—	32	0.35
D15	—	—	33	19.82

以上实验结果表明，Parallel Downward 规划系统能够求解出以上 4 个域中的绝大部分的并行规划问题，并且表现出良好的规划效率和规划质量。与 Sapa 系统相比，Parallel Downward 系统在多数问题上求解时间更少，并且求解能力更强。Parallel Downward 规划系统的扩展性优于 Sapa 系统。

结束语 智能规划是人工智能的重要研究领域。基于状态空间启发式搜索的规划方法已成为智能规划研究的热点。然而，基于状态空间启发式搜索的并行规划方法由于面临状态空间指数级爆炸的问题，有待深入研究。

本文设计的并行规划系统 Parallel Downward 继承了 Fast Downward 的高效性，并且扩展了其求解能力。出于扩展的需要，本文首先提出了 4 个并行规划的相关定义；之后又提出了多值规划任务下动作互斥的定义、充要条件，并实现了动作互斥判断算法；在此基础上设计了并行动作集的生成算法；然后为了提高系统求解质量，本文重新设计了新的适应于并行规划搜索的控制策略；最后，给出剪枝策略，克服了并行规划搜索空间指数级膨胀给求解问题带来的困难。基于 Linux 系统和 gcc 开发环境，实现了 Parallel Downward 规划系统。通过在国际通用测试问题上的大量实验，Parallel Downward 表现出良好的求解效率、求解质量和较强的规划求解能力。通过与 Sapa 规划系统的对比，Parallel Downward 表现出较优的可扩展性。

为了进一步提高系统的规划质量和规划效率，下一步工作可以考虑改进启发式函数。将当前系统的启发式函数估计由当前状态到达目标状态所需的动作数改进为估计由当前状态到达目标状态所需的“动作步”数，以适应求解并行规划问题的需求。

参 考 文 献

[1] Bonet B, Geffner H. Planning as heuristic search[J]. Artificial Intelligence, 2001, 129(1): 5-33

[2] 智能规划竞赛(International Planning Competition)官方网站. 2006. http://zeus.ing.unibs.it/ipc-5/

[3] Helmert M. The Fast Downward Planning System[J]. Journal of Artifical Intelligence Research, 2006, 26: 191-246

[4] Russell S, Norvig P. Artificial Intelligence: A Modern Approach (Second Edition)[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 2003

[5] Nigenda R S, Kambhampati S. AltAlt^p: Online Parallelization of Plans with Heuristic State Search[J]. Journal of Artificial Intelligence Research, 2003, 19: 631-657

[6] Blum A L, Furst M L. Fast planning through planning graph analysis. Artificial Intelligence, 1997, 90: 281-300

[7] 李天际，姜云飞. 图规划及其扩展的分析和研究[J]. 计算机科学, 2001, 7(28): 69-73

[8] 姜云飞，吴康恒. 智能规划的研究和应用[J]. 计算机科学, 2002, 2(29): 100-103

[9] Sapa 规划系统主页. 2002. http://rakaposhi.eas.asu.edu/sapa/

(上接第 177 页)

由 $\langle f(3,3,3), f(0,3,0), f(3,1,3), f(0,1,0)\rangle = \langle 0,1,2,2\rangle$，可知 $f \notin L_{G_{4,2}}$。

(6)对两个拟线性函数集 L_P：

由 $\langle f(3,3,3), f(0,3,0), f(3,1,3), f(0,1,0)\rangle = \langle 0,1,2,2\rangle$，可知 $f \notin L_p$。

(7)由定义可知，$f \notin P_4 \cup \{*\}$。

综上所述，$G_4=\{\langle 0,0,1,1\rangle, \langle 0,0,2,2\rangle, \langle 0,0,3,3\rangle, \langle 1,1,2,2\rangle, \langle 1,1,3,3\rangle, \langle 2,2,3,3\rangle, \langle 0,1,2,3\rangle\}$ 必是部分四值逻辑中准完备集之最小覆盖的成员，同时也证得与之相似的 3 个准完备集均为最小覆盖的成员。

(二)对于第 2 类至第 22 类的 G_4，同理，只需为每一类的某一个准完备集构造一个函数 $f_i(x,y,z)$，其中 $i=2,\cdots,22$，使得函数 $f_i(x,y,z)$ 属于对应的 $T(G_4)$，且 $f_i(x,y,z)$ 不属于除对应 $T(G_4)$ 外的其它 270 准完备集。而这 21 个函数都是存在可求的，所以第 2 类至第 22 类的 39 个准完备集也均为最小覆盖成员。

结束语 本文证明了 $m=4$ 时的 42 个不可剔除的正则可离函数集都是最小覆盖成员，从而定出了部分四值逻辑中保四元正则可离关系的准完备集之最小覆盖成员。至此，部分四值逻辑中准完备集的最小覆盖已彻底解决，这为 P_4^* 中 sheffer 函数的判定与构造奠定了良好的基础，并为部分 K (>4)值逻辑理论的研究提供了帮助。

参 考 文 献

[1] Schofield P. Independent conditions for completeness of finite algebras with a single generator[J]. J. London Math, 1969, 44: 413-423

[2] Kudrjavcev V B. The coverings of precomplete classes of K-valued logic(Russian)[J]. Diskr—etnyi. Analiz, 1970, 17: 32-44

[3] 刘任任. 部分三值逻辑中准完备集之最小覆盖[J]. 湘潭大学：自然科学学报, 1991, 13(2): 158-164

[4] Liu Renren. Some results on the decision for Sheffer functions in partial K-valued Logic(II)[C]//Proceedings of the 28th International Symposium on Multiple-Valued Logic. IEEE Computer Society Press, 1998: 77-81

[5] Liu Renren. Some results on the minimal coverings of precomplete Classes in partial K-valued logic functions[C]//IEEE international conference on systems, Man & Cybernetics. 2003, 1: 2645-2650

[6] Liu Renren. On the categorizing of simply separable relations in partial four-valued logic[C]//Advances in Natural Computation, Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, 2005, 3612: 1251-1256

[7] Liu Renren. On the Categorizing of Fully Symmetric Relations in Partial Four-valued Logic[C]//Advances in Natural Computation, Lecture Notes in Artificial Intelligence. Springer-Verlag, 2006, 4223: 286-289

[8] 刘玉珍，刘任任. 部分 K 值逻辑中正则可离函数集的一些结果[J]. 计算机工程与应用, 2006, 9: 48-49, 72

[9] 刘玉珍，刘任任. 部分 K 值逻辑中最小覆盖之判定的一些结果[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(23): 38-39, 50