

稀疏原子分解算法在 AR 模型参数估计中的应用

姜玉洁¹ 刘国庆² 王天荆²

(南京工业大学计算机科学与技术学院 南京 211816)¹ (南京工业大学数理科学学院 南京 211816)²

摘要 针对自回归(Autoregressive, AR)模型阶数和系数的估计问题,提出一种基于稀疏表示的原子分解新算法。首先,根据 AR 模型自相关函数特征构造一个过完备稀疏字典;其次,针对含噪观测信号,通过引入松弛变量,建立关于 AR 模型特征根稀疏恢复的优化模型;最后,将定阶和参数估计问题转化为求解稀疏最优基问题,并提出一种改进的变尺度变换算法来求解该优化问题。实验结果表明,无论是对模拟信号,还是真实的脑电信号,该算法在定阶和系数估计两方面均优于传统估计方法,具有更好的预测精度和鲁棒性。

关键词 AR 模型,稀疏表示,过完备稀疏基,参数估计

中图分类号 TP391 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.05.008

Application of Atomic Decomposition Algorithm Based on Sparse Representation in AR Model Parameters Estimation

JIANG Yu-jie¹ LIU Guo-qing² WANG Tian-jing²

(College of Computer Science and Technology, Nanjing Tech University, Nanjing 211816, China)¹

(College of Physical and Mathematical Sciences, Nanjing Tech University, Nanjing 211816, China)²

Abstract Aiming at the problem of AR model order and parameters estimation, a novel algorithm based on sparse representation of atomic decomposition was proposed. Firstly, an over-completed sparse dictionary was constructed according to the characteristic of the autocorrelation coefficient of AR model. Secondly, for noisy signals, this paper used the slack variables to establish a new optimization model for sparsely recovery of the characteristic polynomial roots of AR model. Finally, we converted the parameters estimation problem into the problem of best basis selection which is solved by the modified affine scaling methodology. The experiments show that our algorithm is more effective than the traditional methods in terms of the forecasting precision and robustness.

Keywords AR model, Sparse representation, Over-completed basis, Parameters estimation

1 引言

时间序列分析是统计学科的一个重要分支,它通过处理预测目标本身的时间信号序列来获得事物随时间演变的特性与规律,进而预测信号未来的发展。而时间序列分析中常见的一种形式是 AR 模型,该模型在建模时具有计算简便、实时性强等优点,易满足系统条件,在雷达图像处理^[1]、无线通信^[2]、神经网络^[3]、生物医学信号处理^[4]等领域有着广泛应用。

若建立一个完整的 AR 模型,传统方法需先识别模型阶数,再用样本数据对模型系数进行估计。关于定阶问题,现有的研究主要是在模型的复杂度和拟合度间进行折中,最为常用的是最小信息准则(Akaike Information Criterion, AIC)^[5]。AIC 虽然为解决时间序列模型的定阶问题带来诸多便利,但无法给出相容估计,即当样本容量很大时,根据 AIC 确定的模型阶数并不能收敛至真值。在准确估计模型阶数的条件下,已有一些有效的系数估计方法被提出,如 Burg 法、Levin-

son-Durbin 递推算法、最小均方(LMS)算法^[6]等。但若观测信号被噪声污染,这些算法的估计质量会大幅下降^[7]。传统方法将 AR 模型的建模过程分成定阶及系数估计两个步骤,定阶过程的误差直接影响系数估计的准确性。此外,当时间序列信号与其他随机信号混合时,传统建模方法很难从中分离出时间信号。综上所述,传统方法的推广性较差,在很多情况下无法适用,亟需新的改进方法。

Donoho D L 等人^[8]在研究信号稀疏处理问题时提出了基追踪下的原子分解方法,该方法的主要思想是基追踪(Basis Pursuit, BP)算法可以通过凸优化方式在过完备原子库中找出信号最稀疏的表示形式,将一些较小的变量系数压缩至零,即剔除该变量。该方法基于全局优化原则,将稀疏表示的系数的 l^1 范数最小化,是一种较为稳健的信号分解方法。

借助于 BP 算法全局优化的优势,本文提出一种基于稀疏表示的原子分解算法,它能对 AR 模型的阶数及系数进行同步估计。该算法首先根据原子分解的思想构建一个过完备

到稿日期:2016-04-14 返修日期:2016-06-06 本文受国家自然科学基金(61501224)资助。

姜玉洁(1992-),女,硕士,主要研究方向为信号处理、时间信号序列分析, E-mail: jyj2003100106@163.com; 刘国庆(1966-),男,博士,教授,主要研究方向为图像处理、数据融合、雷达信号处理; 王天荆(1977-),女,博士,副教授,主要研究方向为信号处理。

稀疏基,将定阶及系数估计问题转化为求解 $l^p (0 \leq p < 1)$ 度量优化问题,求解该类优化问题的算法类似于变尺度变换 (Affine Scaling Transformation, AST) 算法^[9];接着对 $l^p (0 \leq p < 1)$ 优化模型进行推广,使其适用于应用中常见的 AR 模型含噪信号,利用改进的变尺度变换方法对带有不等式约束的新优化模型进行稀疏估计,得到最优解,这样可将传统参数估计方法中的两个步骤合二为一,简化了建模过程;最后,通过模拟时间信号和真实脑电信号的参数估计实验来验证本文算法的有效性。

2 AR 模型的过完备稀疏基构造

假设信号 $\{y_t, t \in T\}$ 符合 AR 模型:

$$y_t = \sum_{i=1}^q a_i y_{t-i} + \xi_t \quad (1)$$

其中, a_1, \dots, a_q 是模型参数, $\{\xi_t, t \in T\}$ 是均值为 0、方差为 σ^2 的白噪声序列, q 为模型阶数。

AR 模型中常见的问题是平稳性问题^[10]。自回归过程 $AR(q)$ 平稳的充要条件是特征方程 $\alpha(L) = L^q + a_1 L^{q-1} + a_2 L^{q-2} + \dots + a_q = 0$ 的 q 个特征根 $u_i (1 \leq i \leq q)$ 均在单位圆内,即 $|u_i| < 1$ 。为了方便研究,不妨设特征根两两不相等。

将方程(1)两边同乘以 y_{t-r} , 然后取期望,得到关于自相关系数 R 的重要递推式:

$$R(r) - a_1 R(r-1) - \dots - a_q R(r-q) = 0 \quad (2)$$

显然,当特征根两两不相等时,式(2)的一般解为:

$$R(r) = e_1 u_1^r + e_2 u_2^r + \dots + e_q u_q^r, r = 0, \dots, K \quad (3)$$

将式(3)写成矩阵形式,即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ u_1 & u_2 & \dots & u_q \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_q^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1^K & u_2^K & \dots & u_q^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(0) \\ R(1) \\ \vdots \\ R(K) \end{bmatrix} \quad (4)$$

令矩阵 $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ u_1 & u_2 & \dots & u_q \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_q^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_1^K & u_2^K & \dots & u_q^K \end{bmatrix}$, 向量 $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_q \end{bmatrix}$, 向量

$b = [R(0), R(1), \dots, R(K)]^T$, 则式(4)可改写为: $Ue = b$ 。

下文就如何构造一个过完备稀疏基进行详细说明。AR 模型的平稳性条件规定特征根均落在单位圆内,即满足: $-1 < u_1 < u_2 < \dots < u_q < 1$ 。而由式(3)可知,AR 模型的相关函数可通过特征根多项式组合表示,因此在区间 $(-1, 1)$ 找出 u_1, u_2, \dots, u_q 十分关键。针对此问题,利用文献[8]从过完备原子库中找到信号的 q 个最稀疏解的 BP 算法思想,将特征根所在区间 $(-1, 1)$ 等间隔分割成 $N+1$ 份。

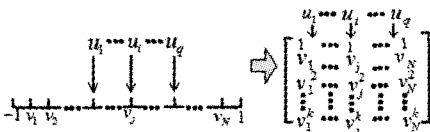


图 1 AR 模型特征根分布

如图 1 所示,区间 $(-1, 1)$ 被 $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_N\}$ 等间隔分割成 $N+1$ 份,其中 $v_j = -1 + \frac{2j}{N+1}$ 且 $u_i = v_j (1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq N, q < N)$, 即由特征根 u_1, u_2, \dots, u_q 构成的矩阵 U 的列向量落在图 1 所示的矩阵中。不同于常规 AR 模型估计方法,本文采用稀疏估计的思想,根据图 1 所示 AR 模型的特征根分布构造一个过完备字典,以此建立一个稀疏结构,即:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ v_1 & v_2 & \dots & v_N \\ v_1^2 & v_2^2 & \dots & v_N^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_1^K & v_2^K & \dots & v_N^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(0) \\ R(1) \\ \vdots \\ R(K) \end{bmatrix} \quad (5)$$

令向量 $X = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T$, 矩阵 $V = [V_1, V_2, \dots, V_N] =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ v_1 & v_2 & \dots & v_N \\ v_1^2 & v_2^2 & \dots & v_N^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_1^K & v_2^K & \dots & v_N^K \end{bmatrix}$$

则式(5)等价于: $VX = b$ 。其中 V 定义为过完备稀疏基,且要求 $K+1 < N$, 列向量 V_1, V_2, \dots, V_N 是构成过完备基最基本的元素,称为原子。 $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_N\}$ 应足够密集,从而使分割点 v_j 与特征根 u_i 重叠,亚定方程组(5)的稀疏表示对应于方程组(4)。

3 稀疏原子分解算法在 AR 参数估计中的应用

3.1 $l^p (0 \leq p < 1)$ 度量优化模型

基于上述构造的过完备稀疏基 V , 可知式(5)为欠定方程组,其解并不唯一,而所需解为最稀疏解,则本文将 AR 模型定阶及系数估计问题转化为求解如下的 $l^p (0 \leq p < 1)$ 度量优化问题:

$$\min E^{(p)}(X) = \sum_{i=1}^N |X[i]|^p \quad (6)$$

s. t. $VX = b$

为求解上述最优化问题, Rao 等人^[9]通过构造拉格朗日函数 $L(X, \lambda)$ 将约束优化模型转化为无约束优化问题:

$$L(X, \lambda) = E^{(p)}(X) + \lambda^T (VX - b) \quad (7)$$

其中, λ 是 $m \times 1$ 阶的 Lagrange 乘子向量。通过对无约束优化问题(7)的推导可得出求解优化问题(6)的迭代算法的思路:

$$X_{k+1} = \Pi^{-1}(X_k) V^T (V \Pi^{-1}(X_k) V^T)^{-1} b \quad (8)$$

然而在很多实际情况中,因环境影响及设备缺陷等原因,在采集信号时会造成观测信号带有噪声,进而导致信号相关系数 R 产生误差。对于亚定方程组(5),常数向量 b 的误差会直接影响 $l^p (0 \leq p < 1)$ 模型(6)的最优稀疏解的稀疏性,因此不能将迭代算法(8)运用至含噪观测信号中。

3.2 参数估计与稀疏表示

考虑到噪声对定阶和系数估计的影响,本文提出估计模型阶数与系数算法的新思路:将信号中的噪声作为约束条件引入 l^p 度量优化模型,问题便转化为不等式约束最优化问题,最终目标是从原子基中提取 q 个有效基。这 q 个稀疏解的位置分别对应于 AR 模型的特征根 u_1, u_2, \dots, u_q 在区间

(-1,1)的位置,而非零根的个数 q 对应 AR 模型的最佳阶数。

当实际信号 $\{y_t, t \in T\}$ 带有噪声时,信号的自相关系数 R 也会在理论值附近波动。因此,针对实际情况,对模型(6)进行推广:

$$\min E^{(p)}(X) = \sum_{i=1}^N |X[i]|^p, 0 \leq p < 1 \quad (9)$$

$$\text{s. t. } |VX - b| < \epsilon_0$$

其中,向量 $b = [R(0), R(1), \dots, R(K)]^T$ 是含噪声信号的自相关系数;误差矩阵 $\epsilon_0 = [\epsilon, \epsilon, \dots, \epsilon]^T$, ϵ 表示观测误差上限。

正如 3.1 节所提到的,迭代算法(8)不适用于上述不等式约束模型,为了解决此类问题,引入松弛变量 $\eta = b + \epsilon_0 - VX$, $\eta_2 = VX - b + \epsilon_0$,这时可将模型(9)的约束条件改为:

$$D \times [X, \eta, \eta_2]^T = d \quad (10)$$

$$\eta \geq 0 \quad (11)$$

$$\eta_2 \geq 0 \quad (12)$$

其中, $D = \begin{bmatrix} V & I & 0 \\ V & 0 & -I \end{bmatrix}$, $d = \begin{bmatrix} b + \epsilon_0 \\ b - \epsilon_0 \end{bmatrix}$, I 是单位矩阵。

显然,若直接用迭代算法(8)求解含等式约束(10)的优化问题,迭代过程中不等式(11)和式(12)将不能成立。为了改变这种情况^[11],本文提出新的目标函数:

$$\min \sum_{i=1}^N |X[i]|^p + \sigma_1 \sum_{i=1}^{K+1} |\eta[i]|^\alpha + \sigma_2 \sum_{i=1}^{K+1} |\eta_2[i]|^\alpha \quad (13)$$

其中, σ_1, σ_2 为正的权重系数。不妨设范数因子 $p, \alpha \in [0, 1)$ 。不难发现,当 σ_1, σ_2 趋于零时,新的目标函数退化为模型(9)的目标函数。为了简化表达,令 $f = [X', \eta', \eta_2']^T$, 则优化问题(9)改为:

$$\min \phi(f) = \sum_{i=1}^N |f[i]|^p + \sigma_1 \sum_{i=N+1}^{N+K+1} |f[i]|^\alpha + \sigma_2 \sum_{i=N+K+2}^{N+2K+2} |f[i]|^\alpha \quad (14)$$

$$\text{s. t. } Df = d, f[N+i] \geq 0, i = 1, \dots, 2K+2$$

迭代算法(8)由于类似于能全局收敛至稀疏解的 AST 算法,被广泛应用于内点优化领域,具有极好的收敛性能。考虑到 AST 的这一优势,本文在此基础上提出改进的变尺度算法来求解优化问题(14),这实际上也是一种内点逼近的算法。

定理 1^[12] 内点法可求解较为复杂的约束优化问题,只要保证初始点为可行域的内点,则每次迭代的点都是可行点。

根据以上定理,如果初始迭代点选择为可行解,即 $f[N+i] \geq 0, i = 1, \dots, 2K+2$, 则迭代过程中它们将保持非负状态,优化模型(14)就可忽略不等式约束。至此, l^p ($0 \leq p < 1$) 优化模型的思路可应用于寻求带有不等式约束优化问题的稀疏解,并且只要在迭代过程中将 σ_1, σ_2 设置得足够小,求得的最终解即为最初的模型(9)的最优解。

接下来给出同步估计 AR 模型阶数与系数的新算法的具体过程。首先构造迭代公式,定义对称尺度矩阵^[11] W :

$$W^{-2}(f) = \Pi(f) = \text{diag}(p |f[1]|^{p-2}, \dots, p |f[1]|^{p-2}, \sigma_1 |f[N+1]|^{\alpha-2}, \dots, \sigma_1 |f[N+K+1]|^{\alpha-2}, \sigma_2 |f[N+K+1]|^{\alpha-2}, \dots, \sigma_2 |f[N+2K+2]|^{\alpha-2}) \quad (15)$$

针对第 $k+1$ 次迭代,用 W_{k+1} 来表示 W ,其值可由当前解

f_k 来进行估计(即 $W_{k+1} = \Pi(f_k)^{-1/2}$),并定义尺度变量 z : $z = W_{k+1}^{-1} f, f = W_{k+1} z$ 。此变换后,关于 f 的优化问题(14)转换为关于尺度变量 z 的优化问题:

$$\begin{aligned} \min & \phi(W_{k+1} z) \\ \text{s. t. } & D_{k+1} z = d \\ & z(i) \geq 0, i = N+1, \dots, N+2K+2 \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $D_{k+1} = DW_{k+1}$ 。

类似于 AST 方法,为了获得一个可行下降方向,求出在当前迭代点 f_k 处的梯度的值后将其投影至 D_{k+1} 的零空间上,可得搜索方向 l_k :

$$\begin{aligned} l_k &= (I - D_{k+1}^+ D_{k+1}) W_{k+1} \Pi(f_k) f_k \\ &= (I - D_{k+1}^+ D_{k+1}) W_{k+1} W_{k+1}^2 f_k \\ &= (I - D_{k+1}^+ D_{k+1}) z_k \end{aligned} \quad (17)$$

其中, D_{k+1}^+ 是 D_{k+1} 的 Moore-Penrose 逆。得到搜索方向后,新的迭代点 z_{k+1} 和 f_{k+1} 的计算公式如下:

$$z_{k+1} = z_k - \mu_k l_k, f_{k+1} = f_k - W_{k+1} \mu_k l_k \quad (18)$$

其中, μ_k 为正的步长。若 $\mu_k = 1$, 则最终迭代公式为:

$$z_{k+1} = D_{k+1}^+ d, f_{k+1} = W_{k+1} z_{k+1} \quad (19)$$

接下来考虑如何选取一个初始可行解。一般说来, $Df = d$ 的解并不唯一,其任意解表示为 $f = D^+ d + \delta$, 其中 δ 是 D 的零空间 $N(D)$ 上的任意向量。奇异值分解后可以得出 D 的零空间 $N(D)$ 的正交基。然后,通过适当的系数组合就能较容易地得出此类问题的初始迭代向量 f_0 。

3.3 算法流程及收敛性分析

基于以上理论,现给出本文提出的稀疏原子分解算法的流程(若未作特别说明,算法流程中的下标 k 一律代表第 k 次迭代)。

(1)对时间序列信号 $\{y_t, t \in T\}$ 进行平稳性检验和零均值化处理;

(2)计算样本的自相关系数 $R(0), R(1), \dots, R(K)$, 将区间 $[-1, 1]$ 等间隔分成 $N+1$ 份;

(3)给定算法观测误差上限 ϵ 及控制误差 ϵ_1 、初始值 f_0 、权重系数 σ_1 和 σ_2 、范数因子 $p, \alpha \in (0, 1)$;

(4)计算 $W_{k+1} = \text{diag}(p |f[1]|^{p-2}, \dots, p |f[N]|^{p-2}, \sigma_1 |f[N+1]|^{\alpha-2}, \dots, \sigma_1 |f[N+K+1]|^{\alpha-2}, \sigma_2 |f[N+K+1]|^{\alpha-2}, \dots, \sigma_2 |f[N+2K+2]|^{\alpha-2})^{-1/2}$;

(5)更新 $z_{k+1} = D_{k+1}^+ d$, 其中 $D_{k+1} = DW_{k+1}$;

(6)令 $f_{k+1} = W_{k+1} z_{k+1}$;

(7)若 $\|f_k - f_{k-1}\|_2 / \|f_{k-1}\|_2 < \epsilon_1$, 算法结束,否则令 $k = k+1$, 返回步骤(4)。

下面重点研究本文算法的收敛性。本文所描述的收敛分析是建立在全局收敛定理(Global Convergence Theorem, GCT)^[13]的基础上,具体描述如下。

定理 2 算法得出的解序列从一个有界可行解出发能收敛于具有稀疏性的最小解(利用类似于文献[9]的技巧很容易证明定理 2)。

除了收敛分析外,算法的收敛速度也不容忽视,因为收敛速度与计算复杂度密切相关。

定理 3^[14] 对任意的有界可行解 f_0 , 该算法产生的序列 $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ 全局收敛至稀疏解,且收敛速度为 $2 - \max(p, \alpha)$ 阶(证明略,可参考文献[15])。

定理 2 和定理 3 表明,范数因子 $p, \alpha(p, \alpha \in [0, 1))$ 的选择与收敛速度密切相关,范数因子越小,收敛速度越快,可见本文算法是有效的且具有较好的收敛速度;同时它打破了传统的先定阶再确定系数的固定模式,将两个步骤合二为一,仅需较少的迭代步数即可收敛至稀疏解,简化了建模过程。此外,本文算法实际上是一种优化算法,观测数据的长度变化对参数估计的影响较小,稳定性好,有效解决了传统 AIC 方法在小样本情况下准确率较低的问题。

4 算法实验及其分析

为了验证参数估计新算法的有效性,进行两组实验。参数取值为: $K=20, N=200, \sigma_1=\sigma_2=2^{-16}, p=0.5, \alpha=0.5$ 。

实验 1 本实验主要考察 AR(2)模型和 AR(3)模型信号的定阶及系数估计问题。

模型 I: $y_t = -0.27y_{t-1} + 0.12y_{t-2} + \xi_t$

模型 II: $y_t = 0.26y_{t-1} + 0.62y_{t-2} - 0.23y_{t-3} + \xi_t$

其中, $\{\xi_t\}_{t=1}^n$ 是均值为 0、方差为 0.04 的白噪声序列。

图 2 和图 3 示出了观测数据长度 $n=200$ 的一个模拟仿真结果。这里利用模型(9)的目标函数 $E^{(p)}$ 来说明本文算法的收敛速度(因为算法在信号可能存在的位置聚集收敛并压制无信号区域,从而解向量的 $l^p(0 \leq p < 1)$ 度量越来越小,直至趋于平稳)。

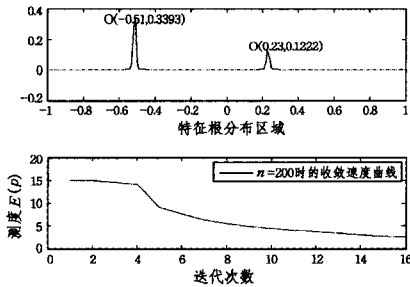


图 2 模型 I 的收敛性能

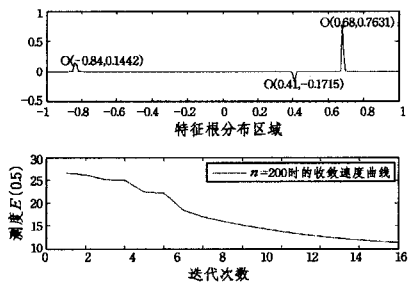


图 3 模型 II 的收敛性能

由图 2 和图 3 可以看出,模型 I 仅迭代 16 步即可将稀疏解收敛至点 $(-0.51, 0.3393), (0.23, 0.1222)$ 附近;模型 II 仅需迭代 18 步左右即可收敛至点 $(-0.84, 0.1442), (0.41, -0.1715), (0.68, 0.7631)$ 附近区域。而模型 I 的特征根 $u_1 = -0.51, u_2 = 0.24$;模型 II 的特征根 $u_1 = -0.83, u_2 = 0.41, u_3 = 0.67$ 。两个模型的稀疏解分别与各自特征根对比后表明,本文算法以较少的迭代次数即可有效达到平稳状态,体现了算法优越的收敛性能。

为进一步说明算法的有效性,将其与传统方法进行对比,对模型 I 和模型 II 在不同观测数据长度 $n=80, 200, 500$ 下分

别进行 100 次模拟,计算出这几种方法准确定阶的次数及在准确定阶条件下系数的估计平均值,结果如表 1 所列。表中“**AIC+LD**”即 AIC 定阶结合 Levinson-Durbin 算法估计参数;“**BIC+Burg**”即 BIC 准则^[5]定阶结合 Burg 算法估计参数。

表 1 传统方法与本文算法估计结果的对比

模型	观测长度	估计方法	定阶正确率/%	系数估计平均值		
				a_1	a_2	a_3
模型 I	800	AIC+LD	42	-0.2097	0.2032	/
		BIC+Burg	43	-0.2174	0.0688	/
		本文算法	73	-0.2603	0.1456	/
	200	AIC+LD	58	-0.2284	0.1868	/
		BIC+Burg	62	-0.2299	0.0738	/
		本文算法	79	-0.2770	0.1353	/
	500	AIC+LD	63	-0.2814	0.1671	/
		BIC+Burg	69	-0.2581	0.1542	/
		本文算法	83	-0.2797	0.1109	/
系数真值				-0.27	0.12	
模型 II	800	AIC+LD	43	0.2115	0.5443	-0.2926
		BIC+Burg	42	0.1977	0.5218	-0.2834
		本文算法	74	0.2872	0.6453	-0.2209
	200	AIC+LD	56	0.2227	0.5647	-0.2651
		BIC+Burg	57	0.2194	0.5455	-0.2733
		本文算法	81	0.2771	0.6386	-0.2180
	500	AIC+LD	63	0.2311	0.5913	-0.2619
		BIC+Burg	68	0.2229	0.5711	-0.2670
		本文算法	84	0.2653	0.6305	-0.2256
系数真值				0.26	0.62	-0.23

从表 1 可得出如下结论:1)定阶准确率随着样本量的增加也相对增大,当模型 II 的观测数据长度为 500 时,AIC 定阶正确率为 63%,BIC 正确率为 68%,而本文算法可达到 84%,明显优于传统的定阶方法;2)针对不同长度的观测数据,本文算法均能有效得到更准确的系数估计。因此,相对于传统方法,本文算法可同时得到阶数和系数更好的估计。

实验 2 本实验对真实小鼠脑电信号进行分析。小鼠视觉皮层局部电位信号(Local Field Potential, LFP)共 7 道,采集自不同时刻睡眠或清醒状态下小鼠大脑皮层的视觉感受区,仿真数据选取了其中的 3 道采样信号(见图 4)。首先对 LFP 信号进行单位根检验^[16],验证了 3 道采样信号均为平稳序列信号后再对其进行归一化处理,目的是使其变为零均值平稳序列(见图 5)。

采用本文算法对预处理后的 3 路信号进行分析,利用拟合出的 AR 模型对第 1 路信号的第 601~630 个数据和第 2,3 路信号的 501~530 个数据进行预报,并分别与传统方法(如 AIC 定阶+LD 系数估计、BIC 定阶+Burg 系数估计、AIC 定阶+LMS 系数估计)进行对比,得到的结果如图 6~图 8 所示。

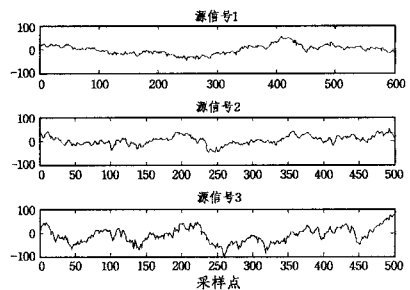


图 4 3 路 LFP 信号

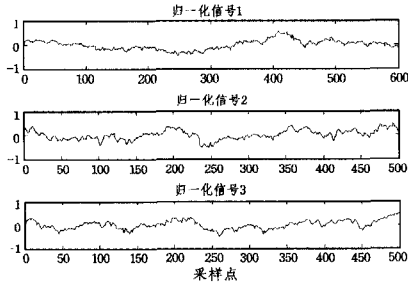


图5 信号归一化预处理

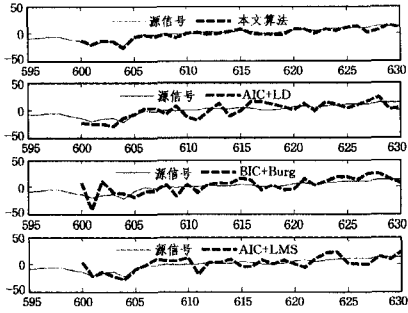


图6 源信号1的预报效果比较

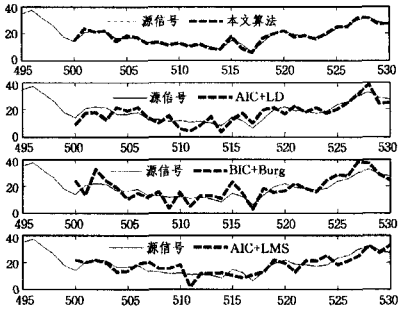


图7 源信号2的预报效果比较

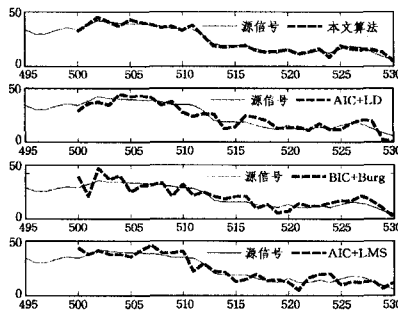


图8 源信号3的预报效果比较

为了更直观地说明算法的优越性,将本文算法与3种传统方法进行性能对比。预报性能指标采用如下均方根误差 E_{RMSE} 和预测精度 E_{PA} ^[17]表示:

$$E_{RMSE} = \left\{ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\hat{y}(i) - y(i))^2 \right\}^{1/2} \quad (20)$$

$$E_{PA} = \frac{\sum_{i=1}^n \{ [\hat{y}(i) - \hat{y}_m(i)] [y(i) - y_m(i)] \}}{(n-1) \vartheta_{\hat{y}} \vartheta_x} \quad (21)$$

其中, $n = \{30, 60, 80\}$ 为预测数据个数, $\hat{y}(i)$ 和 $y(i)$ 分别为第 i 个采样点的预测值与真实值, $\hat{y}_m(i)$ 和 $y_m(i)$ 分别为第 n 个预测值和真实值的平均期望, $\vartheta_{\hat{y}}$ 和 ϑ_x 分别代表预测序列和期

望序列的标准差。 E_{RMSE} 反映的是预测值对真实值的平均偏离,其值越小说明算法的预测效果越好;而 E_{PA} 反映了预测值与真实值在其均值附近偏离的相关性,取值范围为 $[-1, 1]$,其值越接近于1,预测精度越高。4种方法的性能指标比较如表2—表4所列。

表2 不同方法预测性能比较(源信号1)

性能指标	算法	预测采样点个数		
		30	60	80
E_{RMSE}	AIC+LD	0.5979	0.8940	1.5211
	BIC+Burg	0.6394	0.8882	1.6347
	AIC+LMS	0.5962	0.8158	1.4449
	本文算法	0.3856	0.5559	0.8424
E_{PA}	AIC+LD	0.8047	0.7070	0.6022
	BIC+Burg	0.8236	0.7103	0.6212
	AIC+LMS	0.8107	0.6909	0.5988
	本文算法	0.9572	0.8718	0.8070

表3 不同方法预测性能比较(源信号2)

性能指标	算法	预测采样点个数		
		30	60	80
E_{RMSE}	AIC+LD	0.7519	0.8995	1.2473
	BIC+Burg	0.7228	0.9061	1.2803
	AIC+LMS	0.6934	0.8274	1.1669
	本文算法	0.4072	0.5521	0.8683
E_{PA}	AIC+LD	0.8742	0.7643	0.6871
	BIC+Burg	0.8587	0.7322	0.6226
	AIC+LMS	0.9023	0.8004	0.7063
	本文算法	0.9666	0.9017	0.8351

表4 不同方法预测性能比较(源信号3)

性能指标	算法	预测采样点个数		
		30	60	80
E_{RMSE}	AIC+LD	0.8047	1.3458	1.8576
	BIC+Burg	0.7986	1.1928	1.7741
	AIC+LMS	0.7563	1.2126	1.7602
	本文算法	0.4918	0.7014	0.9022
E_{PA}	AIC+LD	0.8890	0.7830	0.6755
	BIC+Burg	0.9058	0.8169	0.7019
	AIC+LMS	0.8634	0.7691	0.6544
	本文算法	0.9564	0.9023	0.8277

结合图6—图8和表2—表4可以看出,针对3组信号相同采样点个数的预报数据,本文算法 E_{RMSE} 值最小, E_{PA} 值也相对最接近1,性能指标改善较明显,预测效果有了显著提高(随着预测点个数的增多,预测误差增大,这是由于误差累积造成的)。

另外,利用本文算法对3组信号进行预测时,由于其良好的预测效果,当缺失观测数据时可以用该位置的预测值进行替代,并且不影响预报的效果,体现了本文算法较好的鲁棒性。

结束语 本文基于稀疏性理论,创新性地提出一种原子分解算法并将其应用到含噪观测信号的AR模型阶数和系数估计中。该方法根据AR模型特征根分布特点构造出过完备稀疏基,将定阶和系数估计两步骤合并,转化为稀疏求解最优基问题。本文最后的模拟信号及LFP信号的定阶和系数估计实验表明了算法不仅提高了参数估计的准确性,还简化了建模过程,在定阶的同时进行了非零系数的估计。

本文算法具有良好的收敛速度及稳健的预测精度,在未来的工作中可以进一步将其应用到气象回波与背景杂波信号的分离以及特征提取等其他方面。

参考文献

- [1] XU B, CUI Y, ZHOU G Y, et al. Unsupervised Speckle Level Estimation of SAR Images Using Texture Analysis and AR Model [J]. IEICE Transactions on Communications, 2014, 97(3):691-698.
- [2] ZHAO N, RICHARD Y F, SUN H J, et al. Interference alignment with delayed channel state information and dynamic AR model channel prediction in wireless networks[J]. Wireless Networks, 2015, 21(4):1227-1242.
- [3] INOUSSA G, PENG H, WU J. Nonlinear time series modeling and prediction using functional weights wavelet neural network-based state-dependent AR model[J]. Neurocomputing, 2012, 86(1):59-74.
- [4] CHISCI L, MAVINO A, PERFERI G, et al. Real-time epileptic seizure prediction using AR models and support vector machines [J]. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 2010, 57(5):1124-1132.
- [5] AKAIKE H. A Bayesian analysis of the minimum AIC procedure[J]. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 1978, 30(1):9-14.
- [6] KAY S M, MARPLE S L. Spectrum Analysis—a Modern Perspective[J]. IEEE Trans on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1981, 28(4):441-445.
- [7] BLU T, DRAGOTTI P L, VETTERLI M, et al. Sparse sampling of signal innovations [J]. Signal Processing Magazine IEEE, 2008, 25(2):31-40.
- [8] CHEN S S, DONOHO D L, SAUNDERS M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Review, 2001, 43(1):129-159.
- [9] RAO B D, KREUTZ-DELGADO K. An affine scaling methodology for best basis selection [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(1):187-200.
- [10] 张晓岷. 应用数量经济学 [M]. 北京:机械工业出版社, 2009:266-287.
- [11] CHENG H, LIU G Q. A Modified Affine Scaling Methodology for Non-smooth optimization [J]. Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2006, 28(1):20-25. (in Chinese)
程浩, 刘国庆. 求解一类非光滑优化问题的改进变尺度方法 [J]. 高等学校计算数学学报, 2006, 28(1):20-25.
- [12] 解可新, 韩健, 林友联. 最优化方法 (修订版) [M]. 天津:天津大学出版社, 2004:114-123.
- [13] LUENBREGER D G, YE Y Y. Linear and Nonlinear Programming [M]. New York: Springer, 2008:201-212.
- [14] DING J D, LIU G Q. Convergence Analysis of an Affine Scaling Transformation for Best Basis Selection [J]. Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2011, 33(4):289-294. (in Chinese)
丁建东, 刘国庆. 最优基选择变尺度变换方法收敛性分析 [J]. 高等学校计算数学学报, 2011, 33(4):289-294.
- [15] HAGER W W, ZHANG H C. An affine scaling method for optimization problems with polyhedral constraints [J]. Comput Optim Appl, 2014, 59(1):163-183.
- [16] PANTULA S G, FULLER W A. A Comparison of Unit-Root Test Criteria [J]. Journal of Business & Economic Statistics, 1994, 12(4):449-459.
- [17] CHEN J L, ISLAM S, BISWAS P. Nonlinear dynamics of hourly ozone concentrations; nonparametric short term prediction [J]. Atmospheric Environment, 1998, 32(11):1839-1848.
- (上接第13页)
- [33] YI Y, LI R, CHEN F, et al. A digital watermarking approach to secure and precise range query processing in sensor networks [C]//Proc of 2013 IEEE International Conference on Computer Communication. IEEE, 2013:1950-1958.
- [34] SHENG B, LI Q. Verifiable privacy-preserving range query in two-tiered sensor networks [C]//Proc of 27th IEEE International Conference on Computer Communications. NJ:IEEE. 2008:46-50.
- [35] SHI J, ZHANG R, ZHANG Y. Secure range queries in tiered sensor networks [C]//Proc of the 28th IEEE International Conference on Computer Communication. Piscataway, NJ: IEEE, 2009:945-953.
- [36] ZHANG R, SHI J, ZHANG Y. Secure multidimensional range queries in sensor networks [C]//Proc of the Tenth ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing. ACM, 2009:197-206.
- [37] CHEN F, LIU A X. SafeQ: Secure and efficient query processing in sensor networks [C]// Proc of the 28th IEEE International Conference on Computer Communication. Piscataway, NJ: IEEE, 2010:1-9.
- [38] CHEN F, LIU A X. Privacy and integrity-preserving range queries in sensor networks [J]. IEEE/ACM Transaction on Networks, 2012, 20(6):1774-1787.
- [39] TSOU Y T, LU C S, Kuo S Y. Privacy-and integrity-preserving range query in wireless sensor networks [C]//Proc of Global Communications Conference, 2012 IEEE. IEEE, 2012:328-334.
- [40] ZHANG X, DONG L, PENG H, et al. Achieving efficient and secure range query in two-tiered wireless sensor networks [C]//Proc of the 24th IEEE International Symposium In Quality of Service (IWQoS). 2014:380-388.
- [41] NGUYEN T D, BUI T V, DANG V H, et al. Efficiently preserving data privacy range queries in two-tiered wireless sensor networks [C]//Proc of Ubiquitous Intelligence & Computing and 9th International Conference on Autonomic & Trusted Computing (UIC/ATC). IEEE, 2012:973-978.
- [42] ZHANG X, DONG L, PENG H, et al. Collusion-Aware Privacy-Preserving Range Query in Tiered Wireless Sensor Networks [J]. Sensors, 2014, 14(12):23905-23932.
- [43] CHANG Y K. Fast binary and multiway prefix searches for packet forwarding [J]. Computer Networks, 2007, 51(3):588-605.
- [44] YAO Y, XIONG N, et al. Privacy-preserving max/min query in two-tiered wireless sensor networks [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2013, 65(9):1318-1325.