

一类具有3种否定的模糊模态命题逻辑

陈成 潘正华 吕永席
(江南大学理学院 无锡 214122)

摘要 对不同否定知识的认知、区分、表达、推理及计算是模糊知识研究处理的一个基础。具有矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊命题逻辑形式系统FLCOM是一种能够完整描述模糊知识中的不同否定及其关系与规律的理论。基于FLCOM和中介模态命题逻辑MK,提出一类具有3种否定的模糊模态命题逻辑MKCOM及其扩充系统MTCOM, MS_4 COM和 MS_5 COM;讨论了MKCOM的语义和语法解释,并证明了MKCOM的可靠性定理和完备性定理。

关键词 模糊命题逻辑形式系统,中介模态逻辑,模糊模态命题逻辑

中图分类号 O142 文献标识码 A DOI 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.04.055

Fuzzy Modal Propositional Logic with Three Kinds of Negation

CHEN Cheng PAN Zheng-hua LV Yong-xi
(School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract In the fuzzy knowledge processing, it is a basic theory for distinguishing, expressing, reasoning and calculating for different negative knowledge. The fuzzy propositional logic formal system FLCOM with contradictory negation, opposition negation and medium negation is a theory which can fully describe the different negation with its relation and law in fuzzy knowledge. In this paper, a fuzzy modal propositional logic system MKCOM with three kinds of negation was proposed based on FLCOM and the medium modal propositional logic MK, as well as the expansion system MTCOM, MS_4 COM and MS_5 COM of MKCOM. Then the interpretation of semantics and syntax about MKCOM was discussed, and the reliability and completeness theorems of MKCOM were proved.

Keywords Fuzzy propositional logic formal system, Medium modal propositional logic, Fuzzy modal propositional logic

1 引言

模态逻辑作为一种研究必然性与可能性的非经典逻辑理论,对命题演算给出了一个非常恰当的非真值系统,而这种系统正是计算机科学一直找寻的。因此,模态逻辑渐渐地从纯粹逻辑领域走向应用领域,备受人工智能与计算机理论学者的重视。为了能进一步拓展模态逻辑的应用价值,不少学者依然致力于模态逻辑的理论研究,并提出了许多新的模态逻辑系统和理论^[1-6]。1985年,朱梧楨、肖奚安提出了中介命题逻辑系统MP及扩充 $MP^{[5-6]}$ 。1989年,邹晶等人基于中介逻辑提出了一种新的模态逻辑系统并给出其语义,同时对中介逻辑的基础进行了模态概念的扩充^[7]。1995年,张东摩、朱梧楨等人同样在中介逻辑的基础上建立了一类具有不同语形结构和语义形式的模态逻辑系统MK, MT, MS_4 及 MS_5 ^[8-9]。

随着知识研究的发展,知识的否定在信息处理中扮演着越来越重要的角色。由于在知识信息处理领域中,知识信息与其否定信息具有同等的地位和作用,因此不少学者提出知

识研究中需要处理多种否定。2006年,潘正华等人从概念层面上提出知识处理中区分知识矛盾关系和对立关系的理论,并研究指出了在清晰性知识和模糊性知识中存在的5种矛盾否定^[10]。2008年,潘正华提出模糊知识中存在3种否定关系^[10],即矛盾否定、对立否定和中介否定,并于2012年提出了具有3种否定的模糊集FSCOM^[11]。2014年,潘正华为了从逻辑的角度描述知识中的3种否定及其规律,提出了一种区分3种否定的模糊命题逻辑系统FLCOM^[12],并将其应用于实际问题的处理。

于是,本文在区分3种否定的模糊命题逻辑FLCOM的基础上,结合中介模态逻辑正规系统MK,试图构造一类具有3种否定的模糊模态命题逻辑系统;亦可看成将知识中存在的3种否定扩充到模态命题逻辑上,使其更具研究性和拓展性,并可望其具有一定的应用价值。

2 区分3种否定的模糊命题逻辑形式系统FLCOM

FLCOM(Fuzzy Propositional Logic with Contradictory negation, Opposite negation and Medium negation)是一种区分

到稿日期:2016-03-15 返修日期:2016-08-01 本文受国家自然科学基金(60973156, 61375004),中央高校基本科研业务费专项资金(JUSRP51317B)资助。

陈成(1991-),女,硕士生,主要研究方向为非经典逻辑理论和模糊信息的知识表示与推理, E-mail: 15961799908@163.com;潘正华(1957-),男,教授,主要研究方向为非经典逻辑理论与模糊信息的知识表示与推理, E-mail: 13013609870@163.com(通信作者);吕永席(1991-),女,硕士生,主要研究方向为非经典逻辑理论与模糊信息的知识表示与推理。

矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊命题逻辑形式系统。

定义 1^[12] (I) 设 S 是非空集, 其元素称为原子命题或原子公式, “ \neg ”(矛盾否定)、“ \neg ”(对立否定)、“ \sim ”(中介否定)、“ \rightarrow ”(蕴涵)、“ \wedge ”(合取)和“ \vee ”(析取)是连接词,“(”与“)”是括号。由连接词和括号组成的模糊命题,亦可称为模糊公式。

(II) 以下的模糊公式称为公理:

- (A₁): $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- (A₂): $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- (A₃): $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (M₁): $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$
- (M₂): $(A \rightarrow \neg \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg \neg A)$
- (H): $\neg \neg A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- (C): $((A \rightarrow \neg A) \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$
- (V₁): $A \rightarrow A \vee B$
- (V₂): $B \rightarrow A \vee B$
- (A₁): $A \wedge B \rightarrow A$
- (A₂): $A \wedge B \rightarrow B$
- (Y \neg): $\neg A \rightarrow \neg \neg A \wedge \neg \sim A$
- (Y \sim): $\sim A \rightarrow \neg \neg A \wedge \neg \neg \neg A \rightarrow \neg \neg \neg A$

(III) 推理规则 MP: 由 $A \rightarrow B$ 与 A 推出 B 。

由(I)-(III)构成的形式系统,被称为区分矛盾否定、对立否定和中介否定的模糊命题逻辑形式系统 FL_{COM}。

定义 2^[12] 在 FL_{COM} 中, 模糊公式 A 的矛盾否定 $\neg A$ 与对立否定 $\neg \neg A$ 、中介否定 $\sim A$ 具有如下关系:

$$\neg A = \neg \neg A \vee \sim A$$

以下是 FL_{COM} 的一种语义解释:

定义 3(λ -赋值)^[12] 设 $\lambda \in (0, 1)$, 映射 $\vartheta: \mathfrak{S} \rightarrow [0, 1]$ 称为 \mathfrak{S} 的一个 λ -赋值, 如果

$$(a) \vartheta(A) + \vartheta(\neg A) = 1.$$

$$(b) 1) \text{ 若 } \lambda \in [\frac{1}{2}, 1), \vartheta(A) \in (\lambda, 1], \text{ 则 } \vartheta(\sim A) = \lambda - \frac{2\lambda - 1}{1 - \lambda}(\vartheta(A) - \lambda);$$

$$2) \text{ 若 } \lambda \in [\frac{1}{2}, 1), \vartheta(A) \in [0, 1 - \lambda], \text{ 则 } \vartheta(\sim A) = \lambda - \frac{2\lambda - 1}{1 - \lambda}\vartheta(A);$$

$$3) \text{ 若 } \lambda \in (0, \frac{1}{2}], \vartheta(A) \in (1 - \lambda, 1], \text{ 则 } \vartheta(\sim A) = 1 - \frac{1 - 2\lambda}{\lambda}(\vartheta(A) + \lambda - 1) - \lambda;$$

$$4) \text{ 若 } \lambda \in (0, \frac{1}{2}], \vartheta(A) \in [0, \lambda], \text{ 则 } \vartheta(\sim A) = 1 - \frac{1 - 2\lambda}{\lambda}\vartheta(A) - \lambda;$$

5) 其他情况, 则 $\vartheta(\sim A) = \max(\vartheta(A), 1 - \vartheta(A))$ 。

$$(c) \vartheta(A \vee B) = \max(\vartheta(A), \vartheta(B)), \vartheta(A \wedge B) = \min(\vartheta(A), \vartheta(B)).$$

(d) $\vartheta(A \rightarrow B) = \mathcal{R}(\vartheta(A), \vartheta(B))$, 这里 $\mathcal{R}: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ 是某个二元函数。

定理 1 在 FL_{COM} 中, $\vdash A \rightarrow A$ 。

证明: $\vdash A \rightarrow A$

$$a) A \rightarrow (A \rightarrow A) \quad (A_1)$$

$$b) (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) \quad (A_2)$$

$$c) A \rightarrow A$$

$$a) b)$$

定理 2 在 FL_{COM} 中, $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ 。

证明: 由定理 1 可知 $\vdash A \wedge B \rightarrow A \wedge B$, 因 $A \wedge B \rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$, 所以 $A \wedge B \rightarrow A \wedge B \Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$, 即证 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ 。

3 一类具有 3 种否定的模糊模态命题逻辑系统 MK_{COM}

经典模态逻辑是研究具有模态词“必然”(□)、“可能”(◇)的命题关系及其推理规律的一类逻辑系统。张东摩、朱梧檎等人在中介逻辑的基础上, 建立了一类具有不同语形结构和语义形式的中介模态逻辑系统 MK, MT, MS₁ 及 MS₂。其中, MK 为基本系统。MK 的主要思想是将“必然 A”(□A) 成立理解为 A 在所有可通的可能世界中为真, “必然 A”为假理解为存在一个可通的可能世界, 在其中 A 为假, 则 □A 的对立否定为真(记为“ $\neg \square A$ ”), 而“必然 A”处于中介状态理解为存在一个可通的可能世界, 则 □A 的中介否定为真(记为“ $\sim \square A$ ”), 其中 A 为中介状态, 但在所有可通的可能世界中 A 不为假。同样, “可能 A”(◇A) 为真可理解为存在一个可通的可能世界, 在其中 A 为真, “可能 A”为假可理解为在任何可通世界中 A 均为假, 则 ◇A 的对立否定为真(记为“ $\neg \diamond A$ ”), 而“可能 A”处于中介状态表明存在一个可达世界, 则 ◇A 的中介否定为真(记为“ $\sim \diamond A$ ”), 其中 A 处于中介状态, 但在所有可达世界 A 均不为真。在上述思想下, 证明了 MK 具有如下性质^[8]:

- 1) $\diamond A \vdash \neg \square \neg A$,
- 2) $\sim \square A \vdash \square \rightarrow \neg A \wedge \sim A$
- 3) $\sim \diamond A \vdash \square \rightarrow A \wedge \sim A$

对于区分 3 种否定的模糊命题逻辑 FL_{COM}, 如何建立基于 FL_{COM} 的模态命题逻辑? 为此, 我们基于中介模态逻辑正规系统 MK, 给出一种具有 3 种否定的模糊模态命题逻辑系统 MK_{COM}。

以模态逻辑命题“明天天气必然是晴天”和“明天天气可能是晴天”为例, 模糊模态命题逻辑系统的主要思想为: 若“必然 A”(□A) 理解为“明天天气必然是晴天”, 则“必然 A”(□A) 的对立否定, 即为模态命题“明天天气必然是晴天”的对立否定, 可理解为“明天天气必然是下雨天”, 记为“ $\neg \square A$ ”。“必然 A”(□A) 的矛盾否定, 即为模态命题“明天天气必然是晴天”的矛盾否定, 可理解为“明天天气必然不是晴天”, 记为“ $\rightarrow \square A$ ”。“必然 A”(□A) 的中介否定, 即为模态命题“明天天气必然是晴天”的中介否定, 可理解为“明天天气必然是阴天”, 记为“ $\sim \square A$ ”。同样, 若“可能 A”(◇A) 理解为“明天天气可能是晴天”, 则“可能 A”(◇A) 的对立否定, 即为模态命题“明天天气可能是晴天”的对立否定, 可理解为“明天天气可能是下雨天”, 记为“ $\neg \diamond A$ ”。“必然 A”(◇A) 的矛盾否定, 即为模态命题“明天天气可能是晴天”的矛盾否定, 可理解为“明天天气可能不是晴天”, 记为“ $\rightarrow \diamond A$ ”。“必然 A”(◇A) 的中介否定, 即为模态命题“明天天气可能是晴天”的中介否定, 可理解为“明天天气可能是阴天”, 记为“ $\sim \diamond A$ ”。

因而, 基于上述主要思想, 提出具有 3 种否定的模糊模态命题逻辑系统的基本理论。

定义 4 (I)设在 FL_{COM} 的基本符号集和形成规则中加入模态词 \square 和 \diamond 构成的形式语言为 \mathcal{R} 。

(II) \mathcal{R} 中的下列公式为公理:

- (A₁): $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- (A₂): $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- (A₃): $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (M₁): $(A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg\neg A)$
- (M₂): $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$
- (H): $\neg A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- (C): $((A \rightarrow \neg A) \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$
- (V₁): $A \rightarrow A \vee B$
- (V₂): $B \rightarrow A \vee B$
- (\wedge_1): $A \wedge B \rightarrow A$
- (\wedge_2): $A \wedge B \rightarrow B$
- (Y \neg): $\neg A \rightarrow \neg A \wedge \neg \sim A$
- (Y \sim): $\sim A \rightarrow \neg A \wedge \neg \neg A (\neg A \wedge \neg \sim A \rightarrow \neg A)$

(III)推理规则:

- (R₁)若 $\vdash A$, 则 $\vdash \square A$
- (R₂) $\square(A \rightarrow B) \vdash \square A \rightarrow \square B$
- (R₃) $\diamond A \vdash \neg \square \neg A$
- (R₄) $\sim \square A \vdash \square \neg A \wedge \diamond \sim A$
- (R₅) $\sim \diamond A \vdash \square \neg A \wedge \diamond \sim A$

由上述(I)–(III)构成的形式系统,被称为具有 3 种否定的模糊模态命题逻辑系统 MK_{COM}。

注:在上列推理规则中,(R₂)对应于经典模态正规系统的 K 公理规则。(R₃),(R₄),(R₅)反映了模态词 \square 与 \diamond 的关系。直观上讲,(R₃)表示“ A 可能真当且仅当不会必然 A 假”;(R₄)表示“必然 A 真取中值当且仅当 A 必然不取假值但可能取中值”;(R₅)表示“ A 可能真取中值当且仅当 A 必然不真但可能取中值”。

在 MK_{COM} 中,可证明如下结论:

引理 1 若 $\vdash A \leftrightarrow B$, 则 $\vdash \square A \leftrightarrow \square B$ 。

- 证明: a) $\vdash A \leftrightarrow B$ 假设
 b) $\vdash \square(A \leftrightarrow B)$ a)规则(R₁)
 c) $\vdash \square(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\square A \leftrightarrow \square B)$ b)规则(R₂)
 d) $\vdash \square A \leftrightarrow \square B$ b) c)

引理 2 $\sim \diamond A \vdash \sim \neg A \square \neg A$ 。

证明:因 $A \vdash \neg \neg A$, 从而 $\neg A \vdash \neg \neg \neg A$, 故 $\square \neg A \vdash \square \neg \neg \neg A$ 。又因 $\neg \neg A \vdash \sim A$, 从而 $\neg \neg \neg A \vdash \neg \sim A$, 故 $\square \neg \neg \neg A \vdash \square \neg \sim A$, 因此 $\neg \square \neg \neg \neg A \vdash \neg \square \neg \sim A$ 。由上面两个结果可得, $\sim \diamond A \vdash \square \neg A \wedge \diamond \sim A \vdash \square \neg A \wedge \neg \square \neg \sim A \vdash \square \neg A \wedge \neg \square \neg \sim A \vdash \square \neg A \wedge \neg \square \neg \sim A \vdash \square \neg A \wedge \neg \square \neg \sim A \vdash \square \neg A \wedge \neg \square \neg \sim A$ 。

定理 3(替换定理) 若 $A \vdash B$, $\partial(A)$ 为 \mathcal{R} 中的任意合式公式, 则 $\partial(A) \vdash \partial(B)$ 。

证明:因 $A \vdash B$, 又由于 $\partial(A)$ 为 \mathcal{R} 中的任意合式公式, 因此 $\partial(A) \vdash \partial(B)$; 又因为 $B \vdash A$, 易得到 $\partial(B) \vdash \partial(A)$, 故 $\partial(A) \vdash \partial(B)$ 。

定理 4 在 MK_{COM} 中

- (1) $\square(A \wedge B) \vdash \square A \wedge \square B$
- (2) $\square A \wedge \square B \vdash \square(A \wedge B)$

- (3) $\square A \vee \square B \vdash \square(A \vee B)$
- (4) $\diamond(A \vee B) \vdash \diamond A \vee \diamond B$
- (5) $\diamond A \vee \diamond B \vdash \diamond(A \vee B)$
- (6) $\diamond(A \wedge B) \vdash \diamond A \wedge \diamond B$

选证(1)–(3), 其它类似。

证明(1): $\square(A \wedge B) \vdash \square A \wedge \square B$

- a) $A \wedge B \rightarrow A$ FL_{COM} 中的公理(\wedge_1)
- b) $\square(A \wedge B \rightarrow A)$ a)规则(R₁)
- c) $\square(A \wedge B) \rightarrow \square A$ b)规则(R₂)
- d) $\square(A \wedge B) \rightarrow \square B$ 同 c)
- e) $\square(A \wedge B) \rightarrow (\square A \wedge \square B)$ c) d)(\wedge_2)

证明(2): $\square A \wedge \square B \vdash \square(A \wedge B)$

- a) $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ FL_{COM} 中的定理 2
- b) $\square A \rightarrow \square(B \rightarrow (A \wedge B))$ a)规则(R₁)
- c) $\square A$ 假设
- d) $\square(B \rightarrow (A \wedge B))$ b) c)
- e) $\square B \rightarrow \square(A \wedge B)$ d)规则(R₂)
- f) $\square B$ 假设
- g) $\square(A \wedge B)$ e) f)
- h) $(\square A \wedge \square B) \rightarrow \square(A \wedge B)$ d) f)

证明(3): $\square A \vee \square B \vdash \square(A \vee B)$

- a) $A \rightarrow A \vee B$ FL_{COM} 中的公理(V₁)
- b) $\square(A \rightarrow A \vee B)$ 规则(R₁)
- c) $\square A \rightarrow \square(A \vee B)$ b)规则(R₂)
- d) $\square B \rightarrow \square(A \vee B)$ 同 c)
- e) $\square A \vee \square B$ 假设
- f) $\square(A \vee B)$ c) d) e)

定理 5 在 MK_{COM} 中

- (1) $\neg \square A \vdash \diamond \rightarrow A, \diamond \rightarrow A \vdash \neg \square A$
- (2) $\neg \diamond A \vdash \square \rightarrow A, \square \rightarrow A \vdash \neg \diamond A$

选证(1): $\neg \square A \vdash \diamond \rightarrow A$

- a) $\neg \square A$ 假设
- b) $\sim \square A \vee \neg \square A$ FL_{COM} 中的定义 2
- c) $\sim \square A$ 假设
- d) $\square \neg \neg A \wedge \diamond \sim A$ c)规则(R₄)
- e) $\diamond \sim A$ d)(\wedge_2)
- f) $\diamond \neg A \vee \diamond \sim A$ e)(V₂)
- g) $\diamond \rightarrow A$ f)定理 4(5)
- h) $\neg \square A$ 假设
- i) $\diamond \neg A$ h)规则(R₃)
- j) $\diamond \neg A \vee \diamond A$ i)(V₁)
- k) $\diamond \rightarrow A$ j)定理 4(5)
- l) $\diamond \rightarrow A$ b) c) g) h) j) (V₂)

$\diamond \rightarrow A \vdash \neg \square A$

- a) $\diamond \rightarrow A$ 假设
- b) $\diamond(\sim A \vee \neg A)$ FL_{COM} 中的定义 2
- c) $\diamond \sim A \vee \diamond \neg A$ b)定理 4(4)
- d) $\diamond \neg A$ 假设
- e) $\neg \square A$ 规则(R₃)
- f) $\neg \square A$ FL_{COM} 中的定义 2
- g) $\diamond \sim A$ 假设

- h) $\Box A$ 假设
- i) $\Box A \vee \Box \sim A$ h) (V_1)
- j) $\Box(A \vee \sim A)$ i) 定理 4(3)
- k) $\Box \rightarrow \neg A$ j) FLCOM 中的公理 ($Y \neg$)
- l) $\sim \Box A$ g) k) 规则 (R_4)
- m) $\rightarrow \Box A$ e) l) FLCOM 中的定义 2
- n) $\rightarrow \Box A$ c) d) g) m) (V_2)

4 模糊模态命题逻辑系统 MKCOM 的语义和语法解释

具有 3 种否定的中介模糊模态逻辑系统 MKCOM 的语义解释由下列正规结构的四元组 $\langle W, R, V, T \rangle$ 构成, 其中 W 称为可能集, R 为 W 上的二元关系, V 是由 $\{P_1, P_2, \dots\} \times W$ 到真值集 T 上的映射, $T = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ 对于任意的 A 及任意的 $w \in W, V(A, w)$ 表示公式 A 在可能世界下的取值, 它可递归定义如下:

- 1) $V(P_n, w) \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}, n=1, 2, 3, \dots$
- 2) $V(\neg A, w) = \begin{cases} 0, & \text{若 } V(A, w) = 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{若 } V(A, w) = \frac{1}{2} \\ 1, & \text{若 } V(A, w) = 0 \end{cases}$
- 3) $V(\sim A, w) = \begin{cases} 1, & \text{若 } V(A, w) = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{其他} \end{cases}$
- 4) $V(\rightarrow A, w) = \max(V(\neg A, w)),$
- $V(\sim A, w) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{若 } V(A, w) = 1 \\ 1, & \text{若 } V(A, w) = \frac{1}{2} \\ 1, & \text{若 } V(A, w) = 0 \end{cases}$
- 5) $V(A \wedge B, w) = \min(V(A, w), V(B, w))$
- 6) $V(A \vee B, w) = \max(V(A, w), V(B, w))$
- 7) $V(A \rightarrow B, w) = \begin{cases} 1, & \text{若 } V(A, w) = 0 \text{ 或 } V(B, w) = 1 \\ & \text{或 } V(A, w) = \frac{1}{2} \text{ 且 } V(B, w) = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{若 } V(A, w) = 1 \text{ 且 } V(B, w) = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{其他} \end{cases}$
- 8) $V(\Box A, w) = \begin{cases} 1, & \text{若 } w' \in R[w] (V(A, w') = 1) \\ 0, & \text{若 } w' \in R[w] (V(A, w') = 0) \\ \frac{1}{2}, & \text{其他} \end{cases}$
- 9) $V(\Diamond A, w) = \begin{cases} 1, & \text{若 } w' \in R[w] (V(A, w') = 1) \\ 0, & \text{若 } w' \in R[w] (V(A, w') = 0) \\ \frac{1}{2}, & \text{其他} \end{cases}$

下面给出 MKCOM 的语法解释。

定义 5 称 $\Gamma \vdash A$ (Γ 可空) 在 MKCOM 中可证, 若存在一个由推理式组成的有穷序列 E_1, E_2, \dots, E_n 使得 E_n 是 $\Gamma \vdash A$ 且对每个 $E_k (1 \leq k \leq n), E_k$ 为 MKCOM 的一个公理推理式, 或者 E_k 由 E_i 与 $E_j (i < k, j < k)$ 使用 MKCOM 的推理规则而得到, 则称 E_1, E_2, \dots, E_n 为 $\Gamma \vdash A$ 的一个证明, n 为证明的长

度。当 Γ 为空时, 简写 $\Gamma \vdash A$ 为 $\vdash A$ 。当 $\vdash A$ 在 MKCOM 中可证时, 称 A 在 MKCOM 中可证。若 Σ 为无穷的公式集且有穷的公式集 $\Gamma \subset \Sigma$ 使 $\Gamma \vdash A$ 在 MKCOM 中可证, 则称 $\Sigma \vdash A$ 在 MKCOM 中可证。

定义 6 公式 A 为公式集 Γ 的语义后承当且仅当对任意的正规系统 $\langle W, R, V, T \rangle$ 以及任意的 $w \in W, B \in \Gamma$, 若 $V(B, w) = 1$, 则 $V(A, w) = 1$ 。 A 为 Γ 的语义后承记为: $\Gamma \vdash A$ 。

定义 7 公式集 Γ 为 MKCOM 中的协调集当且仅当不存在公式 A , 使 $\Gamma \vdash A, \rightarrow A$ 。

定义 8 若 Γ 为协调集且对任何不在 Γ 中的 $A, \Gamma \cup \{A\}$ 不协调, 则称 Γ 为极大协调集。

定理 6 (MKCOM 的可靠性) (a) 若 $\vdash A$, 则 $\vdash A$; (b) 若 $\Gamma \vdash A$, 则 $\Gamma \vdash A$ 。

证明: (a) 假设 $\vdash A$, 则根据定义 5, 存在 $\vdash A$ 的一个证明: E_1, E_2, \dots, E_n 。其中 $E_n = \vdash A$ 。下面将根据归纳法证明 E_1, E_2, \dots, E_n 的长度 n 。

(I) 若 $n=1$, 则根据定义 5, $E_1 \vdash A$, 即 A 是 MKCOM 的一个公理。因 MKCOM 的公理都是永真公式, 所以 $\vdash A$ 是永真推理式。根据定义 6, 则 $\vdash A$ 。

(II) 假设 $n < k$ 时 (a) 成立。当 $n=k$ 时, E_n 为 MKCOM 的一个公理推理式, 或 E_n 由 E_i 与 $E_j (i < n, j < n)$ 使用 MKCOM 的推理规则而得到。若 E_n 为 MKCOM 的一个公理推理式, 如 (I) 得证; 若 E_n 由 E_i 与 $E_j (i < n, j < n)$ 使用 MKCOM 的推理规则而得, 则由归纳假设, E_i 与 E_j 是永真推理式, 所以 E_n 是永真推理式, 即 $\vdash A$ 是永真推理式。根据定义 6, 可得 $\vdash A$ 。

根据 (I) 和 (II), (a) 得证。同理可证 (b)。

引理 3 设 A 是一个 MKCOM 的公式, A_1 与 A_2 是 $\{A, \neg A, \sim A\}$ 中不重复的两个公式, Γ 为 MKCOM 的公式集。则下述命题等价: (a) Γ 是不协调集; (b) 存在 $A \in \Gamma$, 使得 $\Gamma \vdash A_1, A_2$ 在 MKCOM 中可证; (c) 存在 $A \in \Gamma$, 使得 $\Gamma \vdash \neg \sim A$ 在 MKCOM 中可证。

证明: $\{A, \neg A, \sim A\}$ 中任意两个公式是矛盾的 (即不协调的), 所以 A_1 与 A_2 是不协调公式。如果 Γ 是不协调的, 则由定义 7, 存在 $A \in \Gamma$ 使得 $\Sigma \vdash A_1, A_2$ 在 MKCOM 中可证, 故 (a) \Rightarrow (b)。如果存在 $A \in \Gamma$ 使得 $\Gamma \vdash A_1, A_2$ 在 MKCOM 中可证, 因 A_1, A_2 是不协调公式, 所以有 $A_1, A_2 \vdash B$, 即有 $\Gamma \vdash A_1, A_2 \vdash B$ 。根据公式 B 的任意性, 可令 $B = \neg \sim A$, 故 (b) \Rightarrow (c)。如果存在 $A \in \Gamma$, 使得 $\Gamma \vdash \neg \sim A$ 在 MKCOM 中可证, 有 $\Gamma \vdash \neg \sim A \vdash B$, 因而 Σ 是不协调的, 故 (c) \Rightarrow (a)。

引理 4 若 Γ 为 MKCOM 中的极大协调集, A 为任意公式, 则 $A \in \Gamma$ 当且仅当 $\Gamma \vdash A$ 。

证明: 假设 $A \notin \Gamma$, 因 Γ 是极大协调集, 故 $\Gamma \cup \{A\}$ 是不协调集。由此, 存在两种情形: 1) $\neg A \in \Gamma$; 2) $\sim A \in \Gamma$ 。若 $\neg A \in \Gamma, \Gamma \vdash \neg A$ 在 MKCOM 可证, 由引理 3, $\Gamma \vdash A$ 不可证。若 $\sim A \in \Gamma, \Gamma \vdash \sim A$ 在 MKCOM 可证, 由引理 3, $\Gamma \vdash A$ 不可证。假设 $\Gamma \vdash A$ 不可证, 即 $A \notin \Gamma$ 。证毕。

引理 5 若 Γ 为 MKCOM 中的极大协调集, A 为任意公式, 则 $A \in \Gamma$ 与 $\rightarrow A \in \Gamma$ 有且仅有一个成立。

证明: 若 $A \in \Gamma$ 与 $\rightarrow A \in \Gamma$ 两个成立, 因 $\rightarrow A \vdash \neg A \vee \sim A$, 也就是说 $A \in \Gamma, \neg A \in \Gamma, \sim A \in \Gamma$ 3 个均同时成立, 则由引理 3, Γ 不协调, 这与 Γ 是极大协调集矛盾。

引理 6 若 Γ 为 MKCOM 中的极大协调集, A 为任意公式, 则 $A \in \Gamma, \sim A \in \Gamma, \neg A \in \Gamma$ 有且仅有一个成立。

证明: 若 $A \in \Gamma, \neg A \in \Gamma, \sim A \in \Gamma$ 中有两个成立, 则由引理 3, Γ 不协调, 这与 Γ 是极大协调集矛盾。

定理 7 MKCOM 中的任何协调的合式公式集均可扩充为极大协调集。

证明: 将 MKCOM 的一切公式枚举为 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 。归纳定义 $\Gamma_n: \Gamma_1 = \Gamma$, 若 $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ 协调, 则 $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\}$, 否则 $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ 。令 $\Gamma^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$, 由定义 8, 可验证 Γ^* 是包含 Γ 的极大协调集。

定理 8 设 Γ, Δ 为 MKCOM 系统中的极大协调集, 则 $\{A: \Box A \in \Gamma\} \subset \Delta$ 当且仅当 $\{\Diamond A: A \in \Delta\} \subset \Gamma$ 。

证明: (\Rightarrow) 若 $\{A: \Box A \in \Gamma\} \subset \Delta$, 设 $A \in \Delta$, 只需要证 $\Diamond A \in \Gamma$ 即可。假若 $\sim \Diamond A \in \Gamma$, 即 $\Gamma \vdash \sim \Diamond A$, 由 R_5 可知 $\Gamma \vdash \Box \neg A$, 故 $\neg A \in \Delta$, 这与 $A \in \Delta$ 矛盾。假若 $\neg \Diamond A \in \Gamma$, 则 $\Gamma \vdash \neg \Diamond A$, 从而 $\Gamma \vdash \Box \neg A$, 故有 $\neg A \in \Delta$, 这也与 $A \in \Delta$ 矛盾, 由引理 6 可知 $\Diamond A \in \Gamma$ 。

(\Leftarrow) 若 $\{\Diamond A: A \in \Delta\} \subset \Gamma$, 设 $\Box A \in \Gamma$, 只需要证 $A \in \Delta$ 即可。假若 $\sim A \in \Delta$, 则 $\Diamond \sim A \in \Gamma$, 即 $\Gamma \vdash \Diamond \sim A$ 。另一方面, 容易证明 $\vdash \neg \Box A \vee \Box \neg A$, 因此 $\Gamma \vdash (\Diamond \sim A \wedge \neg \Box A) \vee (\Diamond \sim A \wedge \Box \neg A)$, 从而 $\Gamma \vdash \neg \Box A \vee \sim \Box A$, 即 $\Gamma \vdash \neg \Box A$, 这与 $\Box A \in \Gamma$ 矛盾。假若 $\neg A \in \Delta$, 则 $\Diamond \neg A \in \Gamma$, 从而 $\neg A \in \Delta$, 即 $\neg \Box A \in \Gamma$, 也与 $\Box A \in \Gamma$ 矛盾。故 $A \in \Delta$ 。

定理 9 设 Γ 为 MKCOM 系统的极大协调集, 则

(1) $\Box A \in \Gamma$ 当且仅当对任何使得 $\{A: \Box A \in \Gamma\} \subset \Delta$ 的极大协调集 $\Delta, A \in \Delta$ 。

(2) $\Diamond A \in \Gamma$ 当且仅当存在使得 $\{\Delta A: A \in \Delta\} \subset \Gamma$ 的极大协调集 Δ , 使 $A \in \Delta$ 。

证明: (1)(\Rightarrow) 显然。

(\Leftarrow) 若对任何使得 $\{A: \Box A \in \Gamma\} \subset \Delta$ 的极大协调集 Δ , 均有 $A \in \Delta$ 。不难证明 $\{A: \Box A \in \Gamma\} \vdash A$, 因此 $\{A: \Box A \in \Gamma\}$ 中存在语句 $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash A$, 因此 $\vdash (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \Rightarrow A$, 从而 $\vdash \Box((A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \Rightarrow A)$, 故 $\vdash \Box(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \Rightarrow \Box A$, 因 Γ 中含有 $\Box A_1, \Box A_2, \dots, \Box A_n$, 故 $\Gamma \vdash \Box A_1 \wedge \Box A_2 \wedge \dots \wedge \Box A_n$, 从而 $\Gamma \vdash \Box(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n)$, 因此 $\Gamma \vdash \Box A$, 故 $\Box A \in \Gamma$ 。

(2)(\Rightarrow) 显然。

(\Leftarrow) 若 $\Diamond A \in \Gamma$, 则 $\neg \Box \neg A \in \Gamma$, 即证存在一个极大协调集 Δ , 使 $\{A: \Box A \in \Gamma\} \subset \Delta$ 且 $A \in \Delta$ 。假若不然, 即对任何使 $\{A: \Box A \in \Gamma\} \subset \Delta$ 的极大协调集 $\Delta, A \notin \Delta$, 由 $\neg \Box \neg A \in \Gamma$, 故 $\Box \neg A \notin \Gamma$ 且 $\sim \Box \neg A \notin \Gamma$ 。根据前者及结论(1)可得存在一个极大协调集 Δ_0 , 且 $\neg A \notin \Delta_0$, 由后者可得一个结论, 即 $\Box \neg A \notin \Gamma$ 或者 $\Diamond \sim A \notin \Gamma$ 。若 $\Box \neg A \notin \Gamma$, 则存在一个极大协调集 Δ_1 , 使 $\{A: \Box A \in \Gamma\} \subset \Delta_1$ 且 $A \notin \Delta_1$, 即 $A \in \Delta_1$ 与反证假设矛盾。若 $\Diamond \sim A \notin \Gamma$, 由于 $\{A: \Box A \in \Gamma\} \subset \Delta_0$, 从而 $\{\Diamond A: A \in \Delta_0\} \subset \Gamma$, 因此 $\sim A \notin \Delta_0$, 从而 $A \in \Delta_0$, 也与反证假设矛盾。故存在一个极大协调集 Δ , 使 $\{A: \Box A \in \Gamma\} \subset \Delta$ 且 $A \in \Delta$ 。

为了证明 MKCOM 的完备性, 构造下列正规结构 $\langle W, R, V, T \rangle$, 其中 $W = \{T | \Gamma \text{ 为 MK 中的极大协调集}\}$, R 为 W 上的二元关系。

$\langle \Gamma, \Delta \rangle \in R$ 当且仅当 $\{A: \Box A \in \Gamma\} \subset \Delta$ 。

对任何命题词 $P_i (i = 1, 2, \dots)$ 及 $\Gamma \in W$ 。

$$V(P_i, \Gamma) = \begin{cases} 1, & \text{若 } P_i \in \Gamma \\ \frac{1}{2}, & \text{若 } \sim P_i \in \Gamma \\ 0, & \text{若 } \neg P_i \in \Gamma \end{cases}$$

定理 10 对任何公式 A 及 $\Gamma \in W$,

1) $V(A, \Gamma) = 1$ 当且仅当 $A \in \Gamma$;

2) $V(A, \Gamma) = \frac{1}{2}$ 当且仅当 $\sim A \in \Gamma$;

3) $V(A, \Gamma) = 0$ 当且仅当 $\neg A \in \Gamma$ 。

证明: 对 A 的结构施行归纳, 只讨论 A 形如 $\Box B$ 的情形, 其他情形或可化归为 $\Box B$ 的情形或类似于 FLCOM 的完全性证明。

1) $V(A, \Gamma) = 1$ 当且仅当对 $\forall \Box \in W, (\Gamma, \Delta) \in R_i \rightarrow V(B, \Delta) = 1$ 当且仅当 $\forall \Delta \in W$, 若 $(\Gamma, \Delta) \in R_i$, 有 $B \in \Delta$ 当且仅当 $\Box B \in \Gamma$ 当且仅当 $A \in \Gamma$ 。

3) $V(A, \Gamma) = 0$ 当且仅当 $\exists \Delta \in W, (\Gamma, \Delta) \in R_i \wedge V(B, \Delta) = 0, \exists \Delta \in W, (\Gamma, \Delta) \in R_i \wedge V(B, \Delta) = 0$ 当且仅当 $\exists \Delta \in W, (\Gamma, \Delta) \in R_i$ 且 $\neg B \in \Delta, \exists \Delta \in W, (\Gamma, \Delta) \in R_i$ 且 $\neg B \in \Delta$, 当且仅当 $\exists \Delta \in W, \{\Diamond A: A \in \Delta\} \subset \Gamma$ 且 $\neg B \in \Delta, \exists \Delta \in W, \{\Diamond A: A \in \Delta\} \subset \Gamma$ 且 $\neg B \in \Delta$ 当且仅当 $\Diamond \neg B \in \Gamma, \Diamond \neg B \in \Gamma$ 当且仅当 $\neg \Box B \in \Gamma$ 。

由 1) 和 3) 即得 2)。即证。

定理 11(完备性) 若 $\Gamma \vdash A$, 则 $\Gamma \vdash A$ 。

证明: 若 $\Gamma \vdash A$, 由定理 10 可得, $A \in \Gamma$, 又根据引理 4, 即证 $\Gamma \vdash A$ 。

基于上述给出的具有 3 种否定的模糊模态命题逻辑系统 MKCOM, 可进一步得出 MKCOM 的扩展系统 MTCOM, MS₄COM 和 MS₅COM:

定义 9 在具有 3 种否定的中介模糊模态逻辑系统 MKCOM 中加入推理规则: $\Box A \vdash A$, 则得到中介模态系统 MTCOM。

定义 10 在具有 3 种否定的中介模糊模态逻辑系统 MKCOM 中加入推理规则: $\Box A \vdash \Box \Box A$, 则得到中介模态系统 MS₄COM。

定义 11 在具有 3 种否定的中介模糊模态逻辑系统 MKCOM 中加入推理规则: $\Diamond A \vdash \Box \Diamond A$, 则得到中介模态系统 MS₅COM。

结束语 本文在模糊命题逻辑形式系统 FLCOM 的基础上, 结合中介模态逻辑 MK 构造了一类具有 3 种否定的模糊模态命题逻辑系统 MKCOM, MTCOM, MS₄COM 和 MS₅COM, 为进一步刻画具有模态概念的命题及其不同否定之间的关系和规律奠定了理论基础。

参 考 文 献

[1] ZHANG Z Y, SUI Y F, CAO C G. Based on the Fuzzy Inference System in the Form of Propositional Modal Logic[J]. Journal of Software, 2005, 16(8): 1359-1365.
[2] WANG D G, GU Y D, LI H X. Fuzzy Modal Proposition Logic and its Generalized Tautologies[J]. ACTA Electronica Sinica, 2007, 35(2): 261-264. (in Chinese)
汪德刚, 谷云东, 李洪兴. 模糊模态命题逻辑及其广义重言式

- [J]. 电子学报, 2007, 35(2): 261-264.
- [3] WAN X L. Unary Operator Logic Theory of three Agents—Special Function Relativity under the View of Modern Modal Logic [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Social Science Edition), 2012, 26(3): 38-47. (in Chinese)
万小龙. 一元算符逻辑理论三探——狭义函数相对论视野下的现代模态逻辑[J]. 华中科技大学学报(社会科学版), 2012, 26(3): 33-39.
- [4] ZHAO X. Research Progress of Multi Modal Logic [J]. Philosophical Trends, 2013(2): 92-96. (in Chinese)
赵贤. 多模态逻辑研究进展[J]. 哲学动态, 2013(2): 92-96.
- [5] ZHU W J, XIAO X. An Extension of the Propositional Calculus System of Medium Logic (I) [J]. Journal of Nanjing University (Natural Sciences Edition), 1990, 26(4): 564-578.
- [6] ZHU W J, XIAO X. Propositional Calculus System of Medium logic (II) [J]. J Math Res & Exposition, 1988, 8(3): 457-466.
- [7] ZOU J, QUI W. Medium Modal Logic Formal System and Semantics [C] // Proc 19th Intern Symp Multiple-Valued Logic, 1989.
- [8] GONG N S, ZHANG D M, ZHU W J. Theory and Implementation of the Medium Automatic Reasoning (IV) - a kind of Modal Logic System based on Medium Logic [J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 1995, 8(1): 1-8. (in Chinese)
官宁生, 张东摩, 朱梧楦. 中介自动推理的理论实现(IV) 一类基于中介逻辑的模态逻辑系统[J]. 模式识别与人工智能, 1995, 8(1): 1-8.
- [9] ZHANG D M, GONG N S. Theory and Implementation of the Medium Automatic Reasoning (V)-the table deduction system of the medium modal logic MK [J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 1995, 8(2): 114-120. (in Chinese)
张东摩, 官宁生. 中介自动推理的理论实现(V) 中介模态逻辑 MK 的表推演系统[J]. 模式识别与人工智能, 1995, 8(2): 114-120.
- [10] PAN Z H. A Logical Description of Different Negative Relation in Knowledge [J]. Progress in Natural Science, 2008, 18(11): 66-74.
- [11] PAN Z H. Three Kinds of Negation of Fuzzy Knowledge and Their Base of Set [J]. Chinese Journal of Computers, 2012(7): 1421-1428.
- [12] PAN Z H. Fuzzy Propositional Logic System of distinguish between three kinds of Negation and its Application [J]. Journal of Software, 2014, 25(6): 1255-1272. (in Chinese)
潘正华. 区分 3 种否定的模糊命题逻辑系统及其应用[J]. 软件学报, 2014, 25(6): 1255-1272.

(上接第 245 页)

间复杂度限制了其应用。为了解决这些问题, 本文提出了一种新的原型选择算法 2NMST, 该算法可以保证分类准确率不降低甚至更高的情况下, 约简原始数据集, 降低数据集的保留率。2NMST 算法使用了自然邻居 (2N), 它是一个全新的邻居概念。2NMST 在数据集预处理阶段使用自然邻居来移除噪声数据, 然后使用最小生成树来保留关键原型, 包括边界原型和生成的内部原型等, 从而有效约简数据集。在数据集预处理阶段使用自然邻居使得处理结果明显优于 KNN, 因为自然邻居是一个无参数的最近邻居概念, 每个数据原型的邻居数都是自动计算的。与其他不同的原型选择算法如 TRKNN, PSC 和 BNNT 的实验比较结果表明, 2NMST 的性能优于其他算法。

在中小规模数据集的实验中, 2NMST 总是有最高的分类准确率和最低的原型保留率, 而对于大规模数据集, 2NMST 也可以获得与 BNNT 一样好的准确率, 而且 2NMST 的保留率更低, 性能更好。所以, 可以得出结论: 2NMST 相比其他原型选择算法, 是具有竞争力的, 在相比较的原型选择算法中, 2NMST 无疑是一个很好的选择。

不过, 本文所提算法存在与 BNNT 相似的问题, 就是需要一个节点阈值参数来控制最小生成树的生长, 我们发现, 在 2NMST 中取节点阈值为 `tree_capacity` 是一个较好的选择, 它是一个无尺度的, 对任意规模的数据集都可以自动产生一个合适的参数值。但是, 这个参数值的选择在理论上还没有得到证明, 所以我们会在未来的工作中重点研究算法的优化和理论分析。

参考文献

- [1] FAYED H, ATIYA A F. A Novel Template Reduction Approach for the-Nearest Neighbor Method [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2009, 20(5): 890-896.
- [2] LI J, WANG Y. A new fast reduction technique based on binary nearest neighbor tree [J]. Neurocomputing, 2015, 149: 1647-1657.
- [3] OLVERA-LÓPEZ J A, CARRASCO-OCHOA J A, MARTÍNEZ-TRINIDAD J F. A new fast prototype selection method based on clustering [J]. Pattern Analysis and Applications, 2010, 13(2): 131-141.
- [4] HART B P E. The condensed nearest neighbor rule [J]. IEEE Trans Information Theory, 1968, 14: 515-516.
- [5] CHOU C H, KUO B H, CHANG F. The generalized condensed nearest neighbor rule as a data reduction method [C] // 18th International Conference on Pattern Recognition, 2006 (ICPR 2006). IEEE, 2006: 556-559.
- [6] ANGIULLI F. Fast nearest neighbor condensation for large data sets classification [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2007, 19(11): 1450-1464.
- [7] WILSON D L. Asymptotic properties of nearest neighbor rules using edited data [J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, 1972, SMC-2(3): 408-421.
- [8] WILSON D R, MARTÍNEZ T R. Reduction techniques for instance-based learning algorithms [J]. Mach Learn, 2000, 38(3): 257-286.
- [9] ZOU X, ZHU Q, JIN Y. An adaptive neighborhood graph for LLE algorithm without free-parameter [J]. International Journal of Computer Applications, 2011, 16(2): 20-23.
- [10] ZOU X L, ZHU Q S. Abnormal structure in regular data revealed by Isomap with natural nearest neighbor [M] // Advances in Computer Science, Environment, Ecoinformatics, and Education. Springer Berlin Heidelberg, 2011: 538-544.
- [11] ZHU Q S, ZHANG Y, LIU H J. Classification Algorithm Based on Natural Nearest Neighbor [J]. Journal of Information and Computational Science, 2015, 12(2): 573-580.