

三支决策代价目标函数的关系及推理研究

徐健锋^{1,2,3} 何宇凡¹ 刘 斓^{2,3}

(南昌大学软件学院 南昌 330047)¹ (南昌大学信息工程学院 南昌 330031)²

(同济大学电子与信息工程学院 上海 201804)³

摘 要 三支决策是不确定问题求解的重要理论。经典的决策粗糙集模型通过计算三支区域总体决策最小化风险,给出了一种有效的三支决策阈值求解方案。然而对于决策粗糙集理论中代价目标函数之间的逻辑关系及其三支决策阈值间的推理,目前尚未有研究进行深入讨论。首先,提出了一种基于三支决策代价目标函数间逻辑关系的新型阈值计算方法。其次,根据不同损失函数取值分布情况下的三支决策阈值推导,分别给出了不同阈值的三支分类语义解释。最后,通过一组典型的实例证明了提出的基于三支决策代价目标函数的阈值计算方法及三支决策分类的推理是有效的。

关键词 三支决策,决策粗糙集,代价目标函数,决策阈值

中图分类号 TP181 文献标识码 A DOI 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.06.031

Relationship and Reasoning Study for Three-way Decision Cost Objective Functions

XU Jian-feng^{1,2,3} HE Yu-fan¹ LIU Lan^{2,3}

(School of Software, Nanchang University, Nanchang 330047, China)¹

(School of Information Engineering, Nanchang University, Nanchang 330031, China)²

(College of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)³

Abstract Three-way decision (3WD) is an important method for solving problems under uncertainty. The classical decision rough set theory provides an efficient tri-partition threshold solving method by minimizing the overall decision risk. However, the logical relationship among the three-way decision cost objective functions and its threshold reasoning still need further study. In this study, threshold solution model based on logical relationship among the cost objective functions of three-way decision was constructed. Furthermore, the derivation method of three-way decision thresholds for different loss function values distribution was studied, and the three-way classification semantic interpretation of different domain values was given respectively. Finally, a set of typical examples show that the three-way classification based on the above cost objective functions reasoning is valid.

Keywords Three-way decision, Decision rough sets, Cost objective function, Decision threshold

1 引言

三支决策(Three-way Decisions)^[1]是在粗糙集的基础上发展的一种不确定问题求解的理论。其主要思想是通过引入延迟决策,将决策论域一分为三,使得具有相对充分信息的对象集合被快速分类,而信息相对不确定的对象集合则作为延迟决策区域等待进一步区分。近几年,三支决策在垃圾邮件过滤^[2]、文本情感^[3-4]、图像识别^[5]、流计算^[6]等应用领域取得了显著的成果。

决策粗糙集理论^[7]是三支分类求解的最经典的理论之一。其主要思想是在概率粗糙集模型基础上,建立了一套对应三支决策的损失函数体系,并且给出了一种基于贝叶斯决策理论即决策代价最小化的三支决策阈值求解方法。上述三

支决策的相关研究成果包括不同数据模型的决策粗糙集推广。例如,基于代价敏感度量的概率粗糙集三支决策^[8-9]、模糊集三支决策^[10]、区间集三支决策^[11]、邻域三支决策^[12]等。其他相关研究成果还包括:文献[13]将当前决策粗糙集研究的决策偏好从单纯的风险扩充到以时间、金钱为度量的测试代价,并建立了序独立测试代价敏感信息系统;文献[14]进一步研究了以测试代价最小为目标的属性约简问题;文献[15]结合测试代价和误分类代价,提出了一种新的代价敏感决策粗糙集模型;文献[16]则将多粒度及双量化思想与决策粗糙集相结合来进行研究;文献[17]进一步研究了决策粗糙集的动态计算等。

上述研究表明,决策粗糙集极大地推动和完备了三支决策理论的发展。但是,研究也显示,对于决策粗糙集基础理论

到稿日期:2017-10-23 返修日期:2018-01-31 本文受国家自然科学基金(61763031,61673301,81460769)资助。

徐健锋(1973—),男,博士生,副教授,主要研究方向为粒计算、粗糙集、三支决策;何宇凡(1994—),男,硕士生,主要研究方向为机器学习;刘 斓(1973—),研究员,主要研究方向为粒计算、粗糙集、三支决策,E-mail:liulan_nc@ncu.edu.cn(通信作者)。

中的三支代价目标函数与决策阈值之间的复杂逻辑关系及其与决策阈值的关联性,目前尚未有文献展开充分讨论。

本文将概率粗糙集三支决策为基础,提出一种基于三支决策代价目标函数间逻辑关系的阈值求解方法。基于上述方法,对决策粗糙集不同的三支代价目标函数与决策阈值之间的逻辑关系及其三支分类的语义进行系统的讨论和推理。

2 相关研究

2.1 概率粗糙集三支决策

概率粗糙集是构造三支决策的基础原型之一,也是决策粗糙集的基础^[18-19]。经典信息系统 $IS = (U, A, V, f)$ 。其中 U 代表论域中的对象集合; $A = C \cup D$ 代表属性集合(C 是条件属性, D 是决策属性); V 代表属性的取值范围; f 代表从对象到属性取值的信息函数,即 $f: U \times A \rightarrow V$ 。

为了简化讨论,本文假定信息系统是完备的,即所有对象的所有属性取值都是已知的。由于不同二元关系下概率粗糙集具有不同的表达,因此引入等价关系来刻画对象之间的关系,其定义如下^[7-9]。

定义 1(等价关系) 给定信息系统 IS 上的属性子集 B , 满足条件 $B \subseteq A$, 则基于属性 B 的等价关系记为:

$$IND(B) = \{(x, y) \in U \times U \mid \forall a \in B, f(x, a) = f(y, a)\}$$

处于同一个等价类的任一对象集合 $[x]$ 是构成信息粒的基本结构。从概率论的角度,可以刻画对象 $x \in U$ 对某个决策类 $D_i \in U/IND(D)$ 的隶属程度,其定义如下。

定义 2(条件概率) 对象 $x \in U$ 相对于决策类 $D_i \in U/IND(D)$ 的隶属程度被定义为对象所属等价类 $[x]$ 对决策类 D_i 的条件概率,记为 $Pr(D_i | [x]_R)$, 其计算公式为:

$$Pr(D_i | [x]_R) = \frac{Pr(D_i) \times Pr([x]_R | D_i)}{Pr([x]_R)}$$

基于概率粗糙集理论,在条件概率和等价类定义的基础上,任意决策类的不确定程度可以由上下近似的方式来表示。

定义 3(概率粗糙集的上下近似) 给定一组阈值 (α, β) , 并且满足 $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, 则基于信息系统 IS 的决策类别 D_i 的上下近似可表示为:

$$\overline{apr}(D_i) = \{x \mid Pr(D_i | [x]_R) \geq \beta\}$$

$$apr(D_i) = \{x \mid Pr(D_i | [x]_R) \geq \alpha\}$$

定义 4(概率粗糙集的三支决策) 给定一对阈值 (α, β) , 并且满足 $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, 则基于信息系统 IS 的决策类别 D_i 的三支决策被定义为: 正域 ($Pos_{(\alpha, \beta)}(D_i)$)、边界域 ($Bnd_{(\alpha, \beta)}(D_i)$) 和负域 ($Neg_{(\alpha, \beta)}(D_i)$)。其中:

$$Pos_{(\alpha, \beta)}(D_i) = \{x \in U \mid Pr(D_i | [x]_R) \geq \alpha\}$$

$$Bnd_{(\alpha, \beta)}(D_i) = \{x \in U \mid \beta < Pr(D_i | [x]_R) < \alpha\}$$

$$Neg_{(\alpha, \beta)}(D_i) = \{x \in U \mid Pr(D_i | [x]_R) \leq \beta\}$$

2.2 决策粗糙集理论

决策粗糙集^[20]在概率粗糙集理论的基础上引入了最小风险贝叶斯决策理论。该理论通过计算三支决策的风险损失值,找到期望风险最小的三支分类阈值,将其作为划分正域、延迟域与负域的依据^[21]。

经典决策粗糙集理论以二值的决策域作为研究对象,即

决策值域只考虑互补的二值状态集 $\Omega = \{X, \neg X\}$ 。其中,决策对象集 X 的三支决策区域可记为 $Pos_{(\alpha, \beta)}(X)$, $Bnd_{(\alpha, \beta)}(X)$, $Neg_{(\alpha, \beta)}(X)$, 亦可表示为 $Pos(X)$, $Neg(X)$, $Bnd(X)$, 或 Pos, Neg, Bnd 。

基于贝叶斯风险理论,不同决策显然会导致不同的损失。设 $\lambda_{PP}, \lambda_{BP}, \lambda_{NP}$ 表示将正域元素分别划分为 3 个域的损失函数值,而 $\lambda_{PN}, \lambda_{BN}, \lambda_{NN}$ 表示将负域元素分别划分为 3 个域的损失函数值。

当任一对象 $x \in U$ 的等价类 $[x]_R$ 被分别划分至 3 个决策域后,其三支决策代价目标函数可以分别表示为 T_P, T_N, T_B 。其中:

$$T_P = \lambda_{PP} Pr(X | [x]_R) + \lambda_{PN} Pr(\neg X | [x]_R)$$

$$T_N = \lambda_{NP} Pr(X | [x]_R) + \lambda_{NN} Pr(\neg X | [x]_R)$$

$$T_B = \lambda_{BP} Pr(X | [x]_R) + \lambda_{BN} Pr(\neg X | [x]_R)$$

$$\text{where: } Pr(X | [x]_R) + Pr(\neg X | [x]_R) = 1$$

根据贝叶斯决策准则,每个对象等价类都需要选择期望损失最小的行动集作为最佳行动方案,于是可以得到如下 3 条决策规则: 1) 如果 $T_P \leq T_N$ 和 $T_P \leq T_B$ 同时成立,则 $x \in Pos$; 2) 如果 $T_B \leq T_P$ 和 $T_B \leq T_N$ 同时成立,则 $x \in Bnd$; 3) 如果 $T_N \leq T_P$ 和 $T_N \leq T_B$ 同时成立,则 $x \in Neg$ 。

假设损失函数满足: $\lambda_{NP} \geq \lambda_{BP} \geq \lambda_{PP} \geq 0, \lambda_{PN} \geq \lambda_{BN} \geq \lambda_{NN} \geq 0$, 将上述代价目标函数 T_P, T_N, T_B 的公式分别代入上述 3 条决策规则,则由 3 条决策规则可直接推导出: 当 $Pr(X | [x]_R) \geq \alpha$ 时, $x \in Pos$; 当 $\beta < Pr(X | [x]_R) < \alpha$ 时, $x \in Bnd$; 当 $Pr(X | [x]_R) \leq \beta$ 时, $x \in Neg$ 。其中:

$$\alpha = \frac{\lambda_{PN} - \lambda_{BN}}{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) + (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})}$$

$$\beta = \frac{\lambda_{BN} - \lambda_{NN}}{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{BP})}$$

上述决策粗糙理论虽然给出了一种基于代价损失函数的三支阈值计算方法,但是其三支决策损失函数之间的关系必须符合较严格的假设条件。同时,三支代价目标函数 T_P, T_N, T_B 之间的逻辑关系及其与决策阈值之间的推理也尚无文献展开深入探讨。

3 基于多代价目标函数求解的三支决策

三支决策理论本质上是通过一对阈值 (α, β) 对问题域进行三支决策,决策结果将问题域划分为 Pos 域、 Neg 域和 Bnd 域,并且其对应着不同的风险或利益^[22-23]。一个最佳的三支决策必须使得 3 个域的风险最低或者利益最大化。

根据文献^[24],三支决策的整体期望目标可以表示为:

$$T(\alpha, \beta) = \sum_{[x] \subseteq Pos_{(\alpha, \beta)}(X)} T_P \times Pr([x]) + \sum_{[x] \subseteq Neg_{(\alpha, \beta)}(X)} T_N \times Pr([x]) + \sum_{[x] \subseteq Bnd_{(\alpha, \beta)}(X)} T_B \times Pr([x])$$

其中, T_P, T_N, T_B 为 3 个决策域的代价目标函数。

因此,三支决策阈值求解模型可以表示为: $\arg \min_{(\alpha, \beta)} T(\alpha, \beta)$, 其语义是寻找到一对阈值 $(\alpha, \beta) \in [0, 1]$, 使得 $T(\alpha, \beta)$ 的整体代价最小。

由于 $Pr(X | [x]) + Pr(\neg X | [x]) = 1$, 因此 3 个相对独立的代价目标函数 T_P, T_N, T_B 可改写为以下形式:

$$T_P = (\lambda_{PP} - \lambda_{PN})Pr(X|[x]_R) + \lambda_{PN}$$

$$T_N = (\lambda_{NP} - \lambda_{NN})Pr(X|[x]_R) + \lambda_{NN}$$

$$T_B = (\lambda_{BP} - \lambda_{BN})Pr(X|[x]_R) + \lambda_{BN}$$

可以观察到这 3 个域的代价目标函数的几何含义是以 $Pr(X|[x]_R)$ 为变量,以相关损失函数组合为斜率和截距的线性函数。

对三支分类的阈值 α, β 及退化为二支分类的阈值 γ 的求解,可以看作是上述 3 个代价目标线性函数之间直线交集的横坐标 $Pr(X|[x]_R)$ 的取值。

显然, α, β 的取值可以看作是线性函数 T_P 与 T_B 及 T_N 与 T_B 交点的 $Pr(X|[x]_R)$ 取值。而本文将目标函数 T_N 与 T_P 间的交点的 $Pr(X|[x]_R)$ 取值定义为 γ , 其语义为三支决策退化为二分类的阈值。因此, $T(\alpha, \beta)$ 退化为二支决策时也可以表示为 $T(\gamma, \gamma)$ 。

基于上述研究,本文给出了一种新型代价目标函数分析的阈值求解方法。该方法的主要特点在于:从 3 个决策域的代价目标线性函数 T_P, T_N, T_B 的几何含义角度出发,提出了一种比经典决策粗糙集理论更加简洁和直观的三支决策阈值的求解方法。而且上述求解方法的阈值语义及三支划分还可以根据决策代价目标函数之间的实际关系进行灵活的确定,这也是经典决策粗糙集理论中没有展开讨论的。

该方法对于各种复杂的决策代价关系,都能够提供更加灵活的语义分析。而经典决策粗糙集理论的阈值计算则是基于期望损失最小化思想进行直接推导而获得的,其 3 种决策损失函数之间的关系必须符合较严格的假设条件,尚不具备处理决策代价目标函数之间更加复杂的关系及决策的能力。

3.1 基于代价目标函数分析的阈值求解

求解如下以 $Pr(X|[x]_R)$ 为自变量的决策代价目标函数 T_P 和 T_B 构成的代价目标函数方程组,并且假设满足 $T_P = T_B$ 。

$$\begin{cases} T_P = (\lambda_{PP} - \lambda_{PN}) \cdot Pr(X|[x]_R) + \lambda_{PN} \\ T_B = (\lambda_{BP} - \lambda_{BN}) \cdot Pr(X|[x]_R) + \lambda_{BN} \end{cases}$$

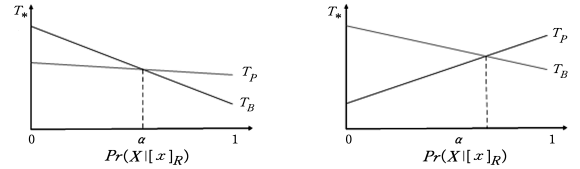
可解得:

$$Pr(X|[x]_R) = \frac{\lambda_{PN} - \lambda_{BN}}{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) + (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})}$$

通过观察可以发现,求解 $T_P = T_B$ 获得的 $Pr(X|[x]_R)$ 取值与经典决策粗糙集理论中指定的 α 的取值在形式上是一致的,因此本文也将其记为 α 。根据线性函数 $T_P = T_B$ 的几何含义可以得到如下关于 α 取值与决策代价之间的关系性质。

性质 1 当 $\lambda_{PP} - \lambda_{PN} < \lambda_{BP} - \lambda_{BN}$ 时,可得: $\alpha \geq Pr(X|[x]_R) \geq 0 \Rightarrow T_P \geq T_B$, 或 $\alpha \leq Pr(X|[x]_R) \leq 1 \Rightarrow T_P \leq T_B$ 。

证明: 由于代价目标函数 T_P 可以看作是以 $Pr(X|[x]_R)$ 为自变量,以 $\lambda_{PP} - \lambda_{PN}$ 为斜率的一元线性函数。代价目标函数 T_B 也可以看作是以 $Pr(X|[x]_R)$ 为自变量,以 $\lambda_{BP} - \lambda_{BN}$ 为斜率的一元线性函数,因此线性函数 T_P 和 T_B 之间的线性关系如图 1 所示(图中横坐标是条件概率 $Pr(X|[x]_R)$ 的取值,纵坐标是各类代价目标函数 T_* 的取值,其中 $*$ $\in \{B, P, N\}$)。



(a) $\lambda_{PP} - \lambda_{PN} < \lambda_{BP} - \lambda_{BN}$ 时的关系 (b) $\lambda_{PP} - \lambda_{PN} > \lambda_{BP} - \lambda_{BN}$ 时的关系

图 1 代价目标函数 T_P 和 T_B 之间的关系

Fig. 1 Relationship between cost objective function

T_P and T_B

当 $Pr(X|[x]_R) = \frac{\lambda_{PN} - \lambda_{BN}}{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) + (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})}$ 时, $T_P = T_B$, 即 $Pr(X|[x]_R) = \alpha$ 时, 两条代价线性函数相交。根据初等解析几何原理, 当代价目标函数 T_P 的斜率 $\lambda_{PP} - \lambda_{PN}$ 大于 T_B 的斜率 $\lambda_{BP} - \lambda_{BN}$, 且 $Pr(X|[x]_R) > \alpha$ 时, $T_P > T_B$ 。当代价目标函数 T_P 的斜率 $\lambda_{PP} - \lambda_{PN}$ 大于 T_B 的斜率 $\lambda_{BP} - \lambda_{BN}$, 且 $Pr(X|[x]_R) < \alpha$ 时, $T_P < T_B$ 。故性质 1 成立。

性质 2 当 $\lambda_{PP} - \lambda_{PN} > \lambda_{BP} - \lambda_{BN}$ 时, 可得: $\alpha \geq Pr(X|[x]_R) \geq 0 \Rightarrow T_P \leq T_B$, 或 $\alpha \leq Pr(X|[x]_R) \leq 1 \Rightarrow T_P \geq T_B$ 。

证明: 当 $\lambda_{PP} - \lambda_{PN} > \lambda_{BP} - \lambda_{BN}$ 时, T_P 和 T_B 之间的关系如图 1(b) 所示。其证明过程与性质 1 类似。

求解如下 T_N 和 T_B 构成的代价目标函数方程组, 并且假设这两个以 $Pr(X|[x]_R)$ 为自变量的线性函数满足 $T_N = T_B$ 。

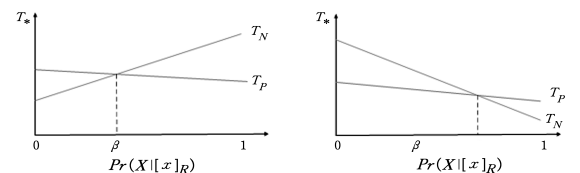
$$\begin{cases} T_N = (\lambda_{NP} - \lambda_{NN}) \cdot Pr(X|[x]_R) + \lambda_{NN} \\ T_B = (\lambda_{BP} - \lambda_{BN}) \cdot Pr(X|[x]_R) + \lambda_{BN} \end{cases}$$

$$\text{可解得 } Pr(X|[x]_R) = \frac{\lambda_{BN} - \lambda_{NN}}{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{BP})}。$$

通过观察可以发现, 求解 $T_N = T_B$ 获得的 $Pr(X|[x]_R)$ 的取值与决策粗糙集理论中指定的 β 取值在形式上是一致的, 因此本文也将其记为 β 。根据 $T_N = T_B$ 的几何含义, 可以得到如下性质。

性质 3 当 $\lambda_{NP} - \lambda_{NN} > \lambda_{BP} - \lambda_{BN}$ 时, 可得: $\beta \geq Pr(X|[x]_R) \geq 0 \Rightarrow T_B \geq T_N$, 或 $\beta \leq Pr(X|[x]_R) \leq 1 \Rightarrow T_B \leq T_N$ 。

证明: 当 $\lambda_{NP} - \lambda_{NN} > \lambda_{BP} - \lambda_{BN}$ 时, T_N 和 T_B 之间的关系如图 2(a) 所示, 其证明过程与性质 1 类似。



(a) $\lambda_{NP} - \lambda_{NN} > \lambda_{BP} - \lambda_{BN}$ 时的关系 (b) $\lambda_{NP} - \lambda_{NN} < \lambda_{BP} - \lambda_{BN}$ 时的关系

图 2 代价目标函数 T_N 和 T_B 之间的关系

Fig. 2 Relationship between cost objective function

T_N and T_B

性质 4 当 $\lambda_{NP} - \lambda_{NN} < \lambda_{BP} - \lambda_{BN}$ 时, 可得: $\beta \geq Pr(X|[x]_R) \geq 0 \Rightarrow T_B \leq T_N$, 或 $\beta \leq Pr(X|[x]_R) \leq 1 \Rightarrow T_B \geq T_N$ 。

证明: 当 $\lambda_{NP} - \lambda_{NN} < \lambda_{BP} - \lambda_{BN}$ 时, T_N, T_B 之间的关系如图 2(b) 所示, 其证明过程与性质 1 类似。

求解如下 T_P, T_N 构成的代价目标函数方程组, 并且假设以 $Pr(X|[x]_R)$ 为自变量的决策代价目标函数满足 $T_P = T_N$ 。

$$\begin{cases} T_P = (\lambda_{PP} - \lambda_{PN}) \cdot Pr(X|[x]_R) + \lambda_{PN} \\ T_N = (\lambda_{NP} - \lambda_{NN}) \cdot Pr(X|[x]_R) + \lambda_{NN} \end{cases}$$

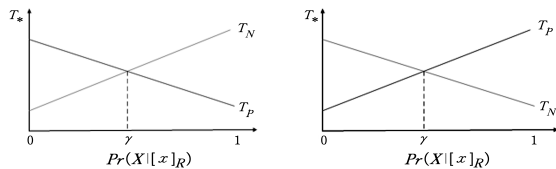
可解得:

$$Pr(X|[x]_R) = \frac{\lambda_{PN} - \lambda_{NN}}{(\lambda_{PN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{PP})}$$

本文将记为 γ 。根据 $T_N = T_B$ 的几何含义,可以得到如下性质。

性质 5 当 $\lambda_{PP} - \lambda_{PN} < \lambda_{NP} - \lambda_{NN}$ 时,可得: $\gamma \geq Pr(X|[x]_R) \geq 0 \Rightarrow T_P \geq T_N$, 或 $\gamma \leq Pr(X|[x]_R) \leq 1 \Rightarrow T_P \leq T_N$ 。

证明:当 $\lambda_{PP} - \lambda_{PN} < \lambda_{NP} - \lambda_{NN}$ 时, T_N, T_B 之间的关系如图 3(a) 所示,其证明过程与性质 1 类似。



(a) $\lambda_{PP} - \lambda_{PN} < \lambda_{NP} - \lambda_{NN}$ 时的关系 (b) $\lambda_{PP} - \lambda_{PN} > \lambda_{NP} - \lambda_{NN}$ 时的关系

图 3 代价目标函数 T_N 和 T_P 之间的关系图

Fig. 3 Relationship between cost objective function T_N and T_P

性质 6 当 $\lambda_{PP} - \lambda_{PN} > \lambda_{NP} - \lambda_{NN}$ 时,可得: $\gamma \geq Pr(X|[x]_R) \geq 0 \Rightarrow T_P \leq T_N$, 或 $\gamma \leq Pr(X|[x]_R) \leq 1 \Rightarrow T_P \geq T_N$ 。

证明:当 $\lambda_{PP} - \lambda_{PN} > \lambda_{NP} - \lambda_{NN}$ 时, T_N, T_B 之间的关系如图 3(b) 所示,其证明过程与性质 1 类似。

3.2 基于代价目标函数的三支决策推理

为了满足 $T(\alpha, \beta)$ 的整体代价目标最小,必须使得三支决策后各个决策域的相应代价是最小的。本节就代价目标函数之间存在的 4 种典型关系实例分别进行代价最优化讨论,这 4 种代价目标函数相应的损失函数关系条件及阈值关系条件如表 1 所列。

表 1 代价目标函数之间的 4 种典型关系

Table 1 Four typical relationships among cost objective functions

关系	条件 1	条件 2
1	$\lambda_{NP} - \lambda_{NN} > \lambda_{BP} - \lambda_{BN} > \lambda_{PP} - \lambda_{PN}$	$0 \leq \beta < \gamma < \alpha \leq 1$
2	$\lambda_{NP} - \lambda_{NN} < \lambda_{BP} - \lambda_{BN} < \lambda_{PP} - \lambda_{PN}$	$1 \geq \beta > \gamma > \alpha \geq 0$
3	$\lambda_{NP} - \lambda_{NN} > \lambda_{BP} - \lambda_{BN} > \lambda_{PP} - \lambda_{PN}$	$1 \geq \beta > \gamma > \alpha \geq 0$
4	$\lambda_{NP} - \lambda_{NN} < \lambda_{BP} - \lambda_{BN} < \lambda_{PP} - \lambda_{PN}$	$0 \leq \beta < \gamma < \alpha \leq 1$

这 4 种关系如下。

1) 代价目标函数之间的关系满足 $\lambda_{NP} - \lambda_{NN} > \lambda_{BP} - \lambda_{BN} > \lambda_{PP} - \lambda_{PN}$, 且约定 $0 \leq \beta < \gamma < \alpha \leq 1$ 。其几何关系为代价目标函数 T_N 的斜率大于代价目标函数 T_B 的斜率,同时,代价目标函数 T_B 的斜率大于代价目标函数 T_P 的斜率。 $T_N = T_P$ 交集的代价纵坐标取值大于 $T_B = T_P$ 及 $T_N = T_B$ 交集的代价纵坐标取值。上述 3 个域的代价目标函数之间的关系如图 4 所示。

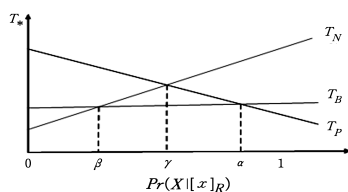


图 4 T_N, T_P, T_B 之间的关系 1

Fig. 4 Relationship 1 among T_N, T_P, T_B

通过分析这 3 种代价目标函数与阈值之间的关系,可以得到如下定理。

定理 1 如果 $\lambda_{NP} - \lambda_{NN} > \lambda_{BP} - \lambda_{BN} > \lambda_{PP} - \lambda_{PN}$, 且 $0 \leq \beta < \gamma < \alpha \leq 1$, 则该系统为三支决策, 决策规则如下:

当 $Pr(X|[x]_R) \geq \alpha$ 时, 采取接受决策动作 P 代价最小;

当 $\beta < Pr(X|[x]_R) < \alpha$ 时, 采取延迟决策动作 B 代价最小;

当 $Pr(X|[x]_R) \leq \beta$ 时, 采取拒绝决策动作 N 代价最小。

证明:根据性质 1、性质 3 和性质 6 可知:

当 $Pr(X|[x]_R) \geq \alpha$, 且 $T_P \leq T_B \leq T_N$ 时, 根据贝叶斯风险最小化原理, 应该采取接受决策动作 P ;

当 $\beta < Pr(X|[x]_R) < \alpha$, 且 $T_B \leq T_P, T_B \leq T_N$ 同时成立时, 根据贝叶斯风险最小化原理, 应该采取延迟决策动作 B ;

当 $Pr(X|[x]_R) \leq \beta$ 且 $T_P \geq T_B \geq T_N$ 时, 根据贝叶斯风险最小化原理, 应该采取拒绝决策动作 N 。

因此定理 1 得证。

2) 代价目标函数之间的关系满足 $\lambda_{NP} - \lambda_{NN} < \lambda_{BP} - \lambda_{BN} < \lambda_{PP} - \lambda_{PN}$ 并且约定 $1 \geq \beta > \gamma > \alpha \geq 0$ 。其几何关系为代价目标函数 T_P 的斜率大于代价目标函数 T_B 的斜率; 同时, 代价目标函数 T_B 的斜率大于代价目标函数 T_N 的斜率。 $T_N = T_P$ 交集的代价纵坐标取值大于 $T_B = T_P$ 及 $T_N = T_B$ 交集的代价纵坐标取值。为满足整体代价目标最小, 可以得到如下定理。

定理 2 当 $\lambda_{NP} - \lambda_{NN} < \lambda_{BP} - \lambda_{BN} < \lambda_{PP} - \lambda_{PN}$, 且 $1 \geq \beta > \gamma > \alpha \geq 0$ 时, 该系统为三支决策, 决策规则如下:

当 $Pr(X|[x]_R) \leq \alpha$ 时, 采取接受决策动作 P 的代价最小;

当 $\beta > Pr(X|[x]_R) > \alpha$ 时, 采取延迟决策动作 B 的代价最小;

当 $Pr(X|[x]_R) \geq \beta$ 时, 采取拒绝决策动作 N 的代价最小。

证明:与定理 1 的证明过程类似。

3) 代价目标函数之间的关系满足 $\lambda_{NP} - \lambda_{NN} > \lambda_{BP} - \lambda_{BN} > \lambda_{PP} - \lambda_{PN}$, 并且 $1 \geq \beta > \gamma > \alpha \geq 0$ 。其几何关系为代价目标函数 T_N 的斜率大于代价目标函数 T_B 的斜率; 同时, 代价目标函数 T_B 的斜率大于代价目标函数 T_P 的斜率。 $T_N = T_P$ 交集的代价纵坐标取值小于 $T_B = T_P$ 及 $T_N = T_B$ 交集的代价纵坐标取值。显然, 在这种关系下, 由 $T_N = T_P$ 交集获得的二支决策优于由 $T_B = T_P$ 及 $T_N = T_B$ 交集获得的三支决策。因此此关系为三支决策中的一种二支决策特例。上述 3 个域的代价目标函数之间的关系如图 5 所示。这种情况下为了满足整体代价目标最小, 可以得到如下定理。

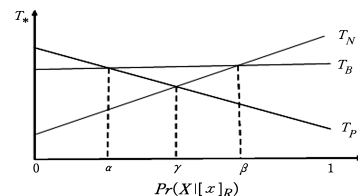


图 5 T_N, T_P, T_B 之间的关系 2

Fig. 5 Relationship 2 among T_N, T_P, T_B

定理 3 当 $\lambda_{NP} - \lambda_{NN} > \lambda_{BP} - \lambda_{BN} > \lambda_{PP} - \lambda_{PN}$, 且 $1 \geq \beta > \gamma > \alpha \geq 0$ 时, 该系统为二支决策, 决策规则如下:

当 $Pr(X|[x]_R) \geq \gamma$ 时, 设定本决策规则为正域, 其代价最小。

当 $Pr(X|[x]_R) < \gamma$ 时, 设定本决策规则为负域, 其代价最小。

证明: 与定理 1 的证明过程类似。

4) 代价目标函数之间的关系满足 $\lambda_{NP} - \lambda_{NN} < \lambda_{BP} - \lambda_{BN} < \lambda_{PP} - \lambda_{PN}$, 且 $0 \leq \beta < \gamma < \alpha \leq 1$ 。其几何关系为代价目标函数 T_P 的斜率大于代价目标函数 T_B 的斜率; 同时, 代价目标函数 T_B 的斜率大于代价目标函数的斜率。 $T_N = T_P$ 交集的代价纵坐标取值小于 $T_B = T_P$ 及 $T_N = T_B$ 交集的代价纵坐标取值。显然, 在这种关系下, 由 $T_N = T_P$ 交集获得的二支决策优于由 $T_B = T_P$ 及 $T_N = T_B$ 交集获得的三支决策。因此, 此关系也为二支决策特例, 为了满足整体代价目标最小, 可以得到如下定理。

定理 4 当 $\lambda_{NP} - \lambda_{NN} < \lambda_{BP} - \lambda_{BN} < \lambda_{PP} - \lambda_{PN}$, 且 $0 \leq \beta < \gamma < \alpha \leq 1$ 时, 该系统为二支决策, 其决策规则满足:

当 $Pr(X|[x]_R) < \gamma$ 时, 将本决策规则设定为正域, 其代价最小;

当 $Pr(X|[x]_R) \geq \gamma$ 时, 将本决策规则设定为负域, 其代价最小。

证明: 与定理 1 的证明过程类似。

如表 1 所列, 本节对决策粗糙集中代价目标函数的二类代价取值情况 $\lambda_{NP} - \lambda_{NN} < \lambda_{BP} - \lambda_{BN} < \lambda_{PP} - \lambda_{PN}$ 和 $\lambda_{NP} - \lambda_{NN} > \lambda_{BP} - \lambda_{BN} > \lambda_{PP} - \lambda_{PN}$ 及二类阈值分布情况 $1 \geq \beta > \gamma > \alpha \geq 0$ 和 $0 \leq \beta < \gamma < \alpha \leq 1$ 分别进行了 4 种组合的分析和推理, 并且得到了最优三支决策的定理 1、定理 2, 以及最优二支决策的定理 3、定理 4。

4 基于代价目标函数推理的三支决策实例

通过一个简单的实例来说明上述基于三支决策代价目标函数间逻辑关系的阈值求解方法。如表 2 所列, 给定类别 X 归属的概率信息表^[24], 其由 15 个等价类组成。其中 $[x]_i$ 表示第 i 个等价类, $Pr([x]_i)$ 表示样本属于 $[x]_i$ 的概率, $Pr(X|[x]_i)$ 表示确定等价类 $[x]_i$ 属于 X 类别的条件概率。

表 2 实例概率信息^[24]

Table 2 Probabilistic information of instance^[24]

	$[x]_1$	$[x]_2$	$[x]_3$	$[x]_4$	$[x]_5$	$[x]_6$	$[x]_7$	$[x]_8$	$[x]_9$	$[x]_{10}$	$[x]_{11}$	$[x]_{12}$	$[x]_{13}$	$[x]_{14}$	$[x]_{15}$
$Pr([x]_i)$	0.0177	0.1285	0.0137	0.1352	0.0580	0.0069	0.0498	0.1070	0.1155	0.0792	0.0998	0.1299	0.0080	0.0441	0.0067
$Pr(X [x]_i)$	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9	0.8	0.8	0.6	0.5	0.4	0.4	0.2	0.1	0.0	0.0

表 2 中记录了以 X 为决策值的各个决策规则条件概率的取值情况, 根据 $\neg X$ 与 X 之间的互补性, 可以推导出以 $\neg X$ 为决策值的各个决策规则条件概率的取值情况, 即 $Pr(\neg X|[x]_i) = 1 - Pr(X|[x]_i)$ 。最后将 $T(\alpha, \beta)$ 作为阈值结果的评价指标。

随机选取 4 组具有代表性的代价目标函数值, 其设定如表 3 所列。分别用代价模式 1—代价模式 4 来表示不同的代价目标函数组合。同时为了简化讨论, 本实例约定决策阈值的取值范围为 $0 \leq \beta < 0.5 < \alpha \leq 1$ 或者 $1 \geq \beta > 0.5 > \alpha \geq 0$ 。

表 3 代价目标函数

Table 3 Values of cost objective function

	λ_{PP}	λ_{BP}	λ_{NP}	λ_{PN}	λ_{BN}	λ_{NN}
代价模式 1	0.00	0.25	2.00	2.00	0.25	0.00
代价模式 2	1.00	0.30	0.00	0.00	0.30	1.00
代价模式 3	0.00	1.00	2.00	2.00	1.00	0.00
代价模式 4	1.00	0.70	0.00	0.00	0.70	1.00

本实例基于表 2 提供的 $Pr(X|[x]_i)$ 取值信息, 通过 3.1 节提出的代价目标函数方程组来求解三支决策阈值。再根据 3.2 节提供的定理来求解不同代价目标函数取值模式下各个三支决策阈值的语义及三支分类。其具体计算过程如下。

将代价模式 1 的各代价函数的取值代入代价目标函数方程组进行计算, 解得决策阈值 $\alpha = 0.875, \beta = 0.125, \gamma = 0.5$ 。由于代价模式 1 满足定理 1 的代价关系条件, 因此表 2 中满足 $Pr(X|[x]_i) \geq 0.875$ 的对象为正域, 满足 $Pr(X|[x]_i) \leq 0.125$ 的对象为负域, 满足 $0.125 < Pr(X|[x]_i) < 0.875$ 的对象为延迟域。

对表 2 中的实验对象数据实施三支分类, 得到三支决策域的划分为:

$$Pos = \{[x]_1, [x]_2, [x]_3, [x]_4, [x]_5\}$$

$$Bnd = \{[x]_6, [x]_7, [x]_8, [x]_9, [x]_{10}, [x]_{11}, [x]_{12}\}$$

$$Neg = \{[x]_{13}, [x]_{14}, [x]_{15}\}$$

通过计算得到该划分的总期望代价目标函数 $T(\alpha, \beta)$ 的值为 0.16023。

将代价模式 2 的各个阈值代入代价目标函数方程组进行计算, 解得决策阈值 $\alpha = 0.3, \beta = 0.7, \gamma = 0.5$ 。由于代价模式 2 满足定理 2 的条件, 因此表 2 中满足 $Pr(X|[x]_i) \leq 0.3$ 的对象为正域, 满足 $Pr(X|[x]_i) \geq 0.7$ 的对象为负域, 满足 $0.3 < Pr(X|[x]_i) < 0.7$ 的对象为延迟域。

根据上述阈值对表 2 实施三支决策, 其划分为:

$$Pos = \{[x]_{12}, [x]_{13}, [x]_{14}, [x]_{15}\}$$

$$Bnd = \{[x]_8, [x]_9, [x]_{10}, [x]_{11}\}$$

$$Neg = \{[x]_1, [x]_2, [x]_3, [x]_4, [x]_5, [x]_6, [x]_7\}$$

通过计算得到该划分的总期望代价目标函数 $T(\alpha, \beta)$ 的值为 0.16437。

同理, 可以求解出代价模式 3 的三支决策阈值 $\alpha = 0.5, \beta = 0.5, \gamma = 0.5$ 。由于该模式满足定理 3 的代价关系条件, 本例是阈值为 $\gamma = 0.5$ 的二支决策, 根据上述阈值对表 2 中的实验数据实施二支分类, 其划分为:

$$Pos = \{[x]_1, [x]_2, [x]_3, [x]_4, [x]_5, [x]_6, [x]_7, [x]_8, [x]_9\}$$

$$Neg = \{[x]_{10}, [x]_{11}, [x]_{12}, [x]_{13}, [x]_{14}, [x]_{15}\}$$

$$Bnd = \{\emptyset\}$$

通过计算得到该划分的总期望代价目标函数 $T(\alpha, \beta)$ 的值为 0.43214。

同理, 可以求解出代价模式 4 的三支决策阈值 $\alpha = 0.7, \beta = 0.3, \gamma = 0.5$ 。该模式满足定理 4 的代价关系条件, 本例是阈值为 $\gamma = 0.5$ 的二支决策, 根据上述阈值对表 2 中的实验数据实施二支分类, 其划分为:

$$Pos = \{[x]_{10}, [x]_{11}, [x]_{12}, [x]_{13}, [x]_{14}, [x]_{15}\}$$

$Neg = \{[x]_1, [x]_2, [x]_3, [x]_4, [x]_5, [x]_6, [x]_7, [x]_8, [x]_9\}$

$Bnd = \{\emptyset\}$

通过计算得到该划分的总期望代价目标函数 $T(\alpha, \beta)$ 的值为 0.21607。

为了证明上述实例结果的有效性,分别求出上述 4 个实例的所有三支决策阈值组合的 $T(\alpha, \beta)$ 值。该对比实验的目的是为了验证本文提出的阈值求解方法是否可以得到代价最优解。

本实例中共有 15 个等价类,其样本分布如表 2 所列。结

合表 3 的 4 种代价模式取值可知:对于代价模式 1 和代价模式 3,决策阈值可能满足 $\{(\alpha, \beta) | \alpha \in (1, 0.9, 0.8, 0.6, 0.5), \beta \in (0.4, 0.2, 0.1, 0)\}$;对于代价模式 2 和代价模式 4,决策阈值可能满足 $\{(\alpha, \beta) | \alpha \in (0.4, 0.2, 0.1, 0), \beta \in (1, 0.9, 0.8, 0.6, 0.5)\}$ 。可见决策阈值 (α, β) 有 4×5 种可能取值。分别计算表 3 的 4 种代价模式的所有总体期望目标 $T(\alpha, \beta)$ 的取值,其结果如图 6 的三维平面图所示。图 6 中各个三维曲面图的 3 个轴分别表示正域决策阈值 α 、负域决策阈值 β 和总体期望目标 T 。三维曲面通过不同颜色来表示总体期望目标的大小,上平面为三维曲面在阈值平面的投影。

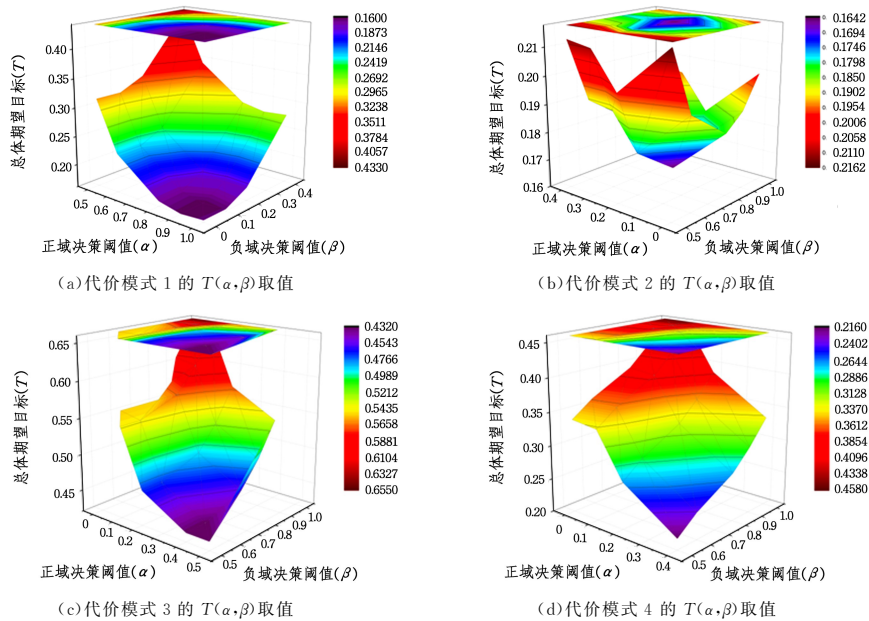


图 6 4 种代价模式的 $T(\alpha, \beta)$ 取值

Fig. 6 $T(\alpha, \beta)$ values of four cost patterns

图 6(a)为代价模式 1 的所有阈值的总体期望目标取值分布图,从图中可知,当 $\alpha=0.9, \beta=0.1$ 时,整体代价目标最小,值为 0.16023。图 6(b)为代价模式 2 的所有阈值的总体期望目标取值分布图,从图中可知,当 $\alpha=0.2, \beta=0.8$ 时,整体代价目标最小,值为 0.16437。图 6(c)为代价模式 3 的所有阈值的总体期望目标取值分布图,从图中可知,当 $\alpha=0.4, \beta=0.5$ 时,整体代价目标最小,值为 0.43214。图 6(d)为代价模式 4 的所有阈值的总体期望目标取值分布图,从图中可知,当 $\alpha=0.5, \beta=0.4$ 时,整体代价目标最小,值为 0.21607。

结束语 本研究对经典决策粗糙集理论中三支决策代价目标函数之间的各种复杂逻辑关系进行了讨论;构造了基于代价目标函数间逻辑关系的阈值求解模型,并且拓展了各种损失函数取值情况下的三支分类推导方法。而经典决策粗糙集阈值求解可以看作是本文讨论三支决策的一种特例。通过实例证明了上述研究提供了一种更加灵活的决策粗糙集三支分类方法,是代价敏感三支决策的理论扩展。

在实际应用中可能遇到各种复杂的决策代价目标场景,比如决策者本身具有更加复杂的风险偏好(如理财投资),甚至有可能有非完全理性的感性偏好。这些不同应用场景中的更加复杂的代价目标函数关系是本研究后续的重要工作。同时将多粒度、多量化思想与本研究相结合也是代价敏感三支决策的重要议题。

参考文献

- [1] YAO Y Y. An outline of a theory of three-way decisions[C]// Rough Sets and Current Trends in Computing. Springer Berlin Heidelberg, 2012:1-17.
- [2] JIA X Y, ZHENG K, LI W W, et al. Three-Way Decisions Solution to Filter Spam Email: An Empirical Study[C]// Rough Sets and Current Trends in Computing. Springer Berlin Heidelberg, 2012:287-296.
- [3] WANG L, MIAO D Q, ZHAO C R. Chinese Emotion Recognition Based on Three-Way Decisions[C]// Rough Sets and Knowledge Technology. Springer International Publishing, 2015:299-308.
- [4] KHAN M T, AZAMA N, KHALID S, et al. A three-way approach for learning rules in automatic knowledge-based topic models[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 82(1):210-226.
- [5] LI H X, ZHANG L B, ZHOU X Z, et al. Cost-sensitive sequential three-way decision modeling using a deep neural network[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 85(C):68-78.
- [6] XU J F, MIAO D Q, ZHANG Y J, et al. A three-way decisions model with probabilistic rough sets for stream computing[J].

- International Journal of Approximate Reasoning, 2017, 88(5):1-22
- [7] YAO Y Y, ZHAO Y. Attribute reduction in decision-theoretic rough set models[J]. Information Sciences, 2008, 178(17):3356-3373.
- [8] LI W T, XU W H. Double-quantitative decision-theoretic rough set[J]. Information Sciences, 2015, 316(C):54-67.
- [9] QIAN Y H, ZHANG H, SANG Y L, et al. Multi-granulation decision-theoretic rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55(1):225-237.
- [10] LIANG D C, XU Z S, LIU D. Three-way decisions based on decision-theoretic rough sets with dual hesitant fuzzy information [J]. Information Sciences, 2017, 396(2):127-143.
- [11] ZHANG H Y, YANG S Y, MA J M. Ranking interval sets based on inclusion measures and applications to three-way decisions [J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91:62-70.
- [12] LI W W, HUANG Z Q, JIA X Y, et al. Neighborhood based decision-theoretic rough set models[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2016, 69(C):1-17.
- [13] MIN F, LIU Q H. A hierarchical model for test-cost-sensitive decision systems[J]. Information Sciences, 2009, 179(14):2442-2452.
- [14] MIN F, HE H P, QIAN Y H, et al. Test-cost-sensitive attribute reduction[J]. Information Sciences, 2011, 181(22):4928-4942.
- [15] LI H X, ZHOU X Z, ZHAO J B, et al. Cost-Sensitive Classification Based on Decision-Theoretic Rough Set Model[C]// International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012:379-388.
- [16] XU W H, GUO Y T. Generalized multi-granulation double-quantitative decision-theoretic rough set[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 105(5):190-205
- [17] CHEN H M, LI T R, LUO C, et al. A Decision-Theoretic Rough Set Approach for Dynamic Data Mining[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2015, 23(6):1958-1970.
- [18] LI T J, YANG X P. An axiomatic characterization of probabilistic rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55(1):130-141.
- [19] YAO Y Y, GRECO S, SŁOWINSKI R. Probabilistic Rough Sets [M] // Springer Handbook of Computational Intelligence. Springer Berlin Heidelberg, 2015:387-411.
- [20] YAO Y Y. Decision-Theoretic Rough Set Models[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2007, 178(17):1-12.
- [21] JIA X Y, LIAO W H, TANG Z M, et al. Minimum cost attribute reduction in decision-theoretic rough set models[J]. Information Sciences, 2013, 219(1):151-167.
- [22] JIA X Y, SHANG L. A Simulated Annealing Algorithm for Learning Thresholds in Three-way Decision-theoretic Rough Set Model[J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2013, 34(11):2603-2606.
- [23] GAO C, YAO Y Y. Determining Thresholds in Three-Way Decisions with Chi-Square Statistic[M]// Rough Sets. Springer International Publishing, 2016:272-281.
- [24] DENG X F, YAO Y Y. A Multifaceted Analysis of Probabilistic Three-way Decisions [J]. Fundamenta Informaticae, 2014, 132(3):291-313.

(上接第 171 页)

前的方法进行了比较。结果显示,所提方法在确保各个 ECU 利用率大致均衡的情况下,减少了任务的最坏响应时间。

参 考 文 献

- [1] AUTOSAR. autosar standards[EB/OL]. <http://www.autosar.org>.
- [2] URBINA M, OBERMAISSER R. Multi-Core Architecture for AUTOSAR based on Virtual Electronic[C]// IEEE 20th Conference on Emerging Technologies & Factory Automation (ET-FA). 2015.
- [3] URBINA M, AHMADIAN H, OBERMAISSER R. Co-simulation Framework for AUTOSAR Multi-Core Processors with Message-based Network-on-Chips[C]// 2016 IEEE 14th International Conference on Industrial Informatics (INDIN). 2016.
- [4] CHEN Y J, CHANG W W, LIU C Y, et al. Processors Allocation for MPSoCs With Single ISA Heterogeneous Multi-Core Architecture[J]. IEEE Access, 2017(5):4028-4036.
- [5] MAKASARWALA H A, HAZARI P. Using genetic algorithm for load balancing in cloud computing[C]// 8th International Conference on Electronics, Computers and Artificial Intelligence (ECAI). 2016.
- [6] KAUR P, AGNIHOTRI M. Efficient Variable Neighborhood Search Performance Based Joint Optimization Task Allocation for Multicore Processor[C]// 2nd International Conference on Contemporary Computing and Informatics (IC3I). 2016.
- [7] FARAGARDI H R, LISPER B, SANDSTROM K, et al. An Efficient Scheduling of AUTOSAR Runnables to Minimize Communication Cost in Multicore Systems[C]// 7th International Symposium on Telecommunications. 2014:41-48.
- [8] TRIPATHI R, VIGNESH S, TAMARAPALLI V, et al. Non-cooperative power and latency aware load balancing in distributed data centers[J]. Journal of Parallel and Distributed Computing, 2017, 107:76-86.
- [9] JIANG Y C. A Survey of Task Allocation and Load Balancing in Distributed Systems[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2016, 27(2):585-599.
- [10] AUTOSAR P. Specification of RTEV3.1.0R4.0 Rev 2 [S/OL]. <http://www.autosar.org>.
- [11] SAIDI S E, COTARD S, CHAABAN K, et al. An ILP approach for mapping AUTOSAR runnables on multi-core architectures [C]// Proceedings of the 2015 Workshop on Rapid Simulation and Performance Evaluation: Methods and Tools. 2015.
- [12] AUTOSAR P. Specification of Operating System (V4.1.0 R4.0 Rev 2) [OL]. <http://www.autosar.org>.
- [13] ASLAM S, SHAH M A. Load Balancing Algorithms in Cloud Computing: A Survey of Modern Techniques [C]// National Software Engineering Conference (NSEC). 2015.
- [14] AUTOSAR P. Explanation of Application Interfaces of the Body and Comfort Domain (V1.2.0 R4.0 Rev 2) [OL]. <http://www.autosar.org>.
- [15] AUTOSAR Partnership. AUTOSAR_MOD_AISpecification[OL]. <http://www.autosar.org>.