

一种基于 Mean Shift 的快速跟踪算法

邹青志¹ 黄山²

(四川大学电气信息学院 成都 610065)¹ (四川大学计算机学院 成都 610065)²

摘要 针对 Mean Shift 算法难以跟踪快速运动目标、算法迭代次数多以及耗费时间长的问题,提出了一种基于 Mean Shift 的快速运动目标检测方法,该方法结合帧差法并融合背景信息来快速检测运动目标;同时提出一种新的相似性度量方法进行初步检测,排除干扰并快速选出符合标准的目标以进行 Mean Shift 匹配,找出最佳目标。该方法不仅减少了传统方法的迭代次数,缩短了算法所需时间,而且在跟踪实验中取得了较好的跟踪效果,提升了算法的鲁棒性。

关键词 Mean Shift 算法,帧差法,目标跟踪,快速跟踪,鲁棒性

中图分类号 TP391.41 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.03.057

Fast Tracking Algorithm Based on Mean Shift Algorithm

ZOU Qing-zhi¹ HUANG Shan²

(College of Electrical Engineering and Information, Sichuan University, Chengdu 610065, China)¹

(College of Computer Science, Sichuan University, Chengdu 610065, China)²

Abstract A fast moving target detection method based on Mean Shift was proposed for the problems that the Mean Shift algorithm is difficult to track fast moving objects, the number of iterations of the algorithm is too large and the process is time consuming. The method is combined with frame difference method and fuses background information for rapid detection of moving target. A new similarity measure method for preliminary testing was put forward to exclude the interference and fast select targets in accordance with the standard Mean Shift matching, finding out the best target. This method not only reduces the number of iterations of the traditional method, but also reduces the time required for the algorithm, and it achieves better tracking performance in the tracking experiment, which improves the robustness of the algorithm.

Keywords Mean Shift algorithm, Frame difference method, Target tracking, Fast tracking, Robustness

1 引言

目标跟踪问题是近几年研究的一个热点方向,它被广泛应用于各个领域。Mean Shift 算法作为一种主流的跟踪算法,最近又取得了一些新的进展,例如文献[1]把自适应 Kalman 滤波方法作为辅助手段融入 Mean Shift 算法中,使其能够预测跟踪发生短时间遮挡的目标,但是该方法对运动模型有一定的要求;文献[2]则使用了目标分块的方法来跟踪目标,这种方法能够很好地处理目标遮挡的情形,但是这类算法的效果也受到分块方式的影响,而且通过分块来跟踪也增加了算法的迭代次数,提升了算法的复杂度;还有研究成果使用预测法来解决快速运动目标的问题,文献[3]提出了一种退火 Mean Shift 算法,用于全局模式的搜索,其不仅能避免落入局部极值,而且还能收敛至准确位置,但是其全局搜索的模式会使得算法效率下降,降低了算法的实时性。

本文提出了一种新的相似性度量策略,并融合了目标周

围的背景信息,结合帧差法来快速检测运动目标,提高了算法的鲁棒性,减少了算法的运算时间,较好地解决了 Mean Shift 跟踪快速目标不准、长时间跟踪积累误差容易丢失的问题,并且有效地改善了算法的实时性。

2 Mean Shift 算法

Mean Shift 算法利用无参估计的方法,通过对初始目标模板和候选模板间相似度的对比进行一系列的迭代,直至收敛找到最优的匹配,从而达到缩小搜索范围并实现跟踪的目的。Mean Shift 算法能够实现对目标的快速定位,适合对非刚体目标的实时跟踪,对目标的旋转、变形等具有较好的适应性。

传统的 Mean Shift 算法主要是对颜色特征采用 Mean Shift 向量,只需要通过少数的迭代步骤就可快速收敛,并定位到目标的位置,其计算量不大,适合于实时跟踪;另外,颜色直方图特征对目标的旋转和变形具有不变性,同时对目标较少部分和短暂的遮挡的容错性能较好。

到稿日期:2016-03-13 返修日期:2016-05-07

邹青志(1990—),男,硕士生,主要研究方向为图像处理与识别,E-mail:254866789@qq.com;黄山(1969—),男,博士生导师,主要研究方向为智能交通领域的图像识别与处理。

3 算法改进

传统 Mean Shift 的不足在于其主要是根据目标的颜色直方图进行跟踪,在复杂场景以及发生目标遮挡的情况时容易丢失目标;其次,对快速运动物体的跟踪效果始终不理想。本文着重对实现算法的快速性以及复杂背景下的抗扰性进行了改进,使得算法的鲁棒性也有很大的提升。

3.1 目标-背景信息融合的相似性度量方法

根据模式识别中的概念可以知道,隶属于同一个类的向量应该都在同一个线性空间中。只要能够构建一个关于目标的特征向量的线性空间 X ,如果向量 u 属于该类,那么肯定会存在一个线性变换,使得:

$$u = X\beta \quad (1)$$

其中, β 是参数向量,它可以通过最小二乘法得到估计值:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T u \quad (2)$$

通过最小二乘法得到的参数向量的估计值就可以得到一个预测回归向量,如式(3)所示:

$$\hat{u} = X \hat{\beta} \quad (3)$$

其中,这个预测回归向量其实也就是 u 在特征向量空间中的投影,换句话说,这个预测回归向量就是在特征向量空间中与 u 最近的向量,它们之间的欧氏距离按照式(4)来计算:

$$d = \|u - \hat{u}\|_2 \quad (4)$$

由以上的理论基础可知,只要建立了一个完备的特征向量空间,对于任意的一个或者多个样本都可以计算得出欧氏距离 d ,在给定的一个阈值下,可以判断出该样本是否隶属于该线性空间,对于多样本就可以根据 d 给出置信度排序结果。

在目标跟踪的过程中,目标的信息往往很有限,所以提出将背景信息融入目标信息中的方法。在视频的初始帧,当选定了跟踪目标之后,在跟踪目标周围扩大 30~50 个像素区域作为背景信息,如图 1 所示,按照上述的理论基础将目标信息与背景信息构建两个线性空间。

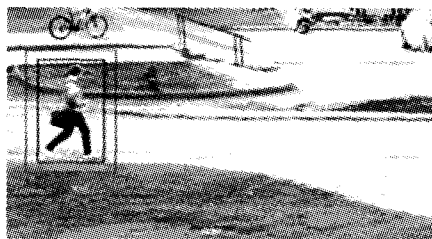


图1 目标-背景区域

为此,需要建立一个关于目标的特征向量空间,本文采取如下的方法:首先通过手动选取第一帧的目标区域,假设该目标区域的尺寸为 $a * b$,对该区域采样,向量首尾相接成一列 $a * b$ 维的向量,对于第二帧图像而言,这一列向量就是关于目标的特征向量空间,之后把第二帧图像的目标跟踪结果区域按照之前的方法采样成一列向量并将它添加到特征向量空间中,以此反复,可以持续整个视频过程,形成一个较完备的特征向量空间;或者为了减少计算量,也可以加快算法速度,把目标线性空间设定为 n 列,当添加到 n 列之后就进行替换操

作,如果之后采样的向量相似性度量高于之前的某个向量,则对其进行替换,每次替换之后重新计算一次特征向量空间中的向量相似性,其中第一帧的向量作为一个标准向量是不予替换的。这部分算法的流程如下:

1)第一帧手工选定目标;

2)对前 n 帧目标跟踪结果区域进行采样,使每个特征向量为 q 维,则:

$$X = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \quad (5)$$

其中, X 为目标的线性空间,表示第 n 帧图像采样的向量;

3)读取下一帧图像,对当前帧的 t 个运动目标区域进行采样,维数为 q 维;

4)根据式(2)和式(3)求得每个运动目标区域的预测回归向量:

$$\hat{\beta}_i = (X^T X)^{-1} X^T u_i, i=1, 2, \dots, t \quad (6)$$

$$\hat{u}_i = X \hat{\beta}_i, i=1, 2, \dots, t \quad (7)$$

5)根据式(8)求得当前帧每个运动目标的采样向量与预测向量的欧氏距离:

$$d_i = \|u_i - \hat{u}_i\|_2, i=1, 2, \dots, t \quad (8)$$

6)根据 $\min d_i$ 判断置信度最高的运动目标,确定该运动目标为跟踪结果。

因为背景信息只是作为目标信息的一个补充,就不需要构建一个完备的空间,另外也为了减小算法的计算量,所以背景信息的线性空间只包含 5 帧图像,另外为了节省开销,每 5 帧图像就更新一次背景信息的线性空间,以此类推。考虑到计算量以及实时性的要求,可以采取一些折中的办法,如隔帧采样或者降采样的方式。假设有一个样本 y ,则根据式(1)~式(4)可以得到关于目标线性空间的欧氏距离 d_{tar} 和关于背景线性空间的欧氏距离 d_{bac} 。如果样本 y 是目标,则 d_{tar} 的值小而 d_{bac} 的值应该大;同样,如果样本 y 是背景,则 d_{bac} 的值小而 d_{tar} 的值应该大。记 ξ 为两个欧氏距离之比,即:

$$\xi = \frac{d_{tar}}{d_{bac}} \quad (9)$$

那么目标就应该为 ξ 值最小的样本。

当图像中出现了两个甚至多个运动目标时,使用上述相似性度量方法,形成对该运动目标区域的置信度判定,当该区域置信度大于某一个高阈值时,则认为该区域是目标区域;当置信度处于高阈值与低阈值之间时,则认为该区域可能是目标区域,否则该区域不是目标区域。

另外需要考虑的是如果使用帧差法没有检测到相关运动目标的处理方案。如果出现该问题,本文选取上一帧图像的跟踪结果作为参考标准在其一定范围内进行 Mean Shift 算法匹配。

3.2 结合帧差法提取运动目标

根据 3.1 节所述,本文识别算法需要能够提取到运动目标区域,从而需要结合帧差法。

帧差法被广泛地应用于固定背景的运动目标检测中,当视频帧之间出现了运动目标时,那么这两帧的运动目标区域就会出现明显的灰度差别,本文就是利用帧差法的这一特性来检测视频中的运动目标。

帧差法能够快速地检测运动目标的质心以及边界区域,考虑到跟踪目标如果静止,同时又出现其他运动目标,本文计算当前帧检测到的运动目标质心与上一帧目标跟踪结果的质心距离,对于大于距离阈值的运动目标,认为其属于干扰;此外,可以用边界区域的尺寸与上一帧的目标区域尺寸进行对比,如果两者的尺寸差异过大,同样可以认为该运动目标是干扰目标。假设某一帧的某个运动目标的质心为 (x_i, y_i) ,长为 h_i ,宽为 w_i ,上一帧的跟踪结果的质心为 (x, y) ,上一帧跟踪结果的区域长为 h ,宽为 w ,那么尺寸差异 D_Size 和质心距离 D_Dis 按照如下定义:

$$D_Size = \frac{|w_i - w|}{w} + \frac{|h_i - h|}{h} \quad (10)$$

$$D_Dis = \frac{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}}{w} \quad (11)$$

因为在相邻两帧时间内目标的尺度以及目标运动的距离不会有太大变化,同时又为了抗尺度变换的干扰以及场景内其他运动目标的干扰,如果 $D_Size < 0.5$,则认为该目标可信,反之亦然;同样,如果 $D_Dis < 5$,则认为该目标可信,这两个值可以根据实际情况进行修改。

3.3 基于前景概率的 Mean Shift 改进

在跟踪过程中,通常使用矩形或椭圆搜索窗来覆盖目标,如果目标的外观比较对称,则该方法可以较好地覆盖目标;如果目标外形不对称甚至不规则,则搜索窗难以较好地覆盖目标,使得跟踪窗内包含大量背景或者其他干扰信息,导致特征模型不准确。当前,几乎所有的跟踪器的设计都只关注了前景区域的像素特征,而较少地利用背景信息。根据3.2节可知,本文已知目标周围的背景信息,所以针对该类问题,提出一种基于前景概率函数的改进 Mean Shift 算法。

利用图像中的前景区域及附近背景的颜色概率分布建立前景概率函数,对目标区域中所有的像素点反向投影加权,削弱跟踪窗口中背景像素的作用。在 Mean Shift 算法的框架上引入前景概率权重,使其在迭代过程中收敛速度更快,提高跟踪器的性能。

首先计算出目标区域与其邻域背景区域的颜色直方图,分别为 H_tar 和 H_bac ,目标区域中每个像素颜色在 H_tar 和 H_bac 中所占的比重分别为:

$$p_tar(x_i) = \frac{h_t(u\delta[b(x_i - u)])}{\sum_{i=0}^{bins} h_t(i)} \quad (12)$$

$$p_bac(x_i) = \frac{h_b(m\delta[b(x_i - m)])}{\sum_{i=0}^{bins} h_b(i)} \quad (13)$$

其中, h_t 和 h_b 分别为两个直方图中的柱; $bins$ 为直方图的柱数; $\delta(x)$ 用来判断像素属于直方图中的哪一柱; p_tar 和 p_bac 分别为像素的颜色在前景背景直方图中所占的比重,则前景概率函数定义为:

$$L(x_i) = \log \frac{p_tar(x_i)}{p_bac(x_i)} \quad (14)$$

根据计算概率系数时有可能出现负数,或者是无界的情况,如果直接使用该式对前景区域进行加权会出现很多问题。所以本文使用其对前景像素加权,则该像素权重为:

$$\lambda(x_i) = 1 - \frac{1}{1 + \exp \frac{-(L(x_i) - a)}{b}} \quad (15)$$

其中, $\lambda(x_i)$ 是一个连续的单调增函数, a 用来控制前景像素概率的置信区间, b 用来控制加权函数的斜率。

当目标与背景差别较大时,前景概率函数能够有效地剔除前景区域中的背景点,而实际跟踪环境中很有可能出现干扰目标甚至与背景接近的情况,导致的结果就是前景颜色概率分布与背景区别不大,此时前景区域中像素的权重也都趋向于同一个值,基于前景概率函数的目标特征模板则退化为普通的基于核函数的颜色概率分布,跟踪器的性能趋近于传统的目标跟踪算法的性能。在跟踪过程中,确定权重参数 a 和 b 之后,样本加权的准则始终保持一致,不会影响跟踪算法的收敛性。

本文设计的算法流程图如图2所示。

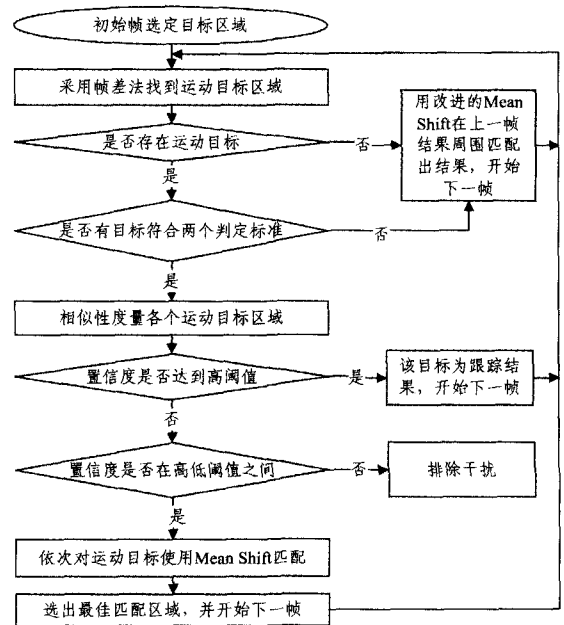


图2 算法流程图

在目标没有发生遮挡、丢失以及场景不复杂的情况下,本文算法不启用改进的 Mean Shift 算法可能就已经达到很好的跟踪效果;在发生遮挡或者场景复杂的情况下,由于帧差法能够很好地检测出运动目标,改进的 Mean Shift 算法只需要在指定区域内进行匹配,即可减少原有算法的运算时间和迭代次数。另外,本文对于是否启用改进的 Mean Shift 算法有预判机制,其可能会出现误判的情况:1)在判断是否有目标时,如果没有目标,则直接启用改进的 Mean Shift 算法来跟踪,此时本文算法就直接退化为改进的 Mean Shift 算法,这对算法的跟踪准确性不会有太大影响,只是会提升算法的复杂度而已;2)在进行置信度判断时,若置信度高于高阈值,则直接判断为跟踪结果,否则启用改进的 Mean Shift 算法继续跟踪,可见如果此时置信度判断错误则可能导致误判。需要注意的是,当此种误判发生时:1)需要符合距离要求和尺度要求;2)需要和真实目标非常相似。所以这种情况发生的可能性已经不是很大。假设此种误判已发生,由于每一帧的检测都是独立的,其并不影响下一帧的检测,另外,建立目标的特征向量空间后对向量的更新是有一个筛选机制的,这一次误判的结果最终会在筛选的过程中被淘汰,所以对后面跟踪的影响更是微乎其微。该算法的唯一不足在于当目标静止或者丢失时,帧差法不能检测出有关目标的区域,导致需要在上一帧跟

踪结果周围进行搜索,这样会增加算法迭代次数。例如在机场等候起飞的跑道上,每架飞机都是排着队等候起飞,在这个过程中飞机会随着前面飞机的起飞向跑道移动,然后停下等待,如此循环直到起飞。假设选取其中一架飞机作为跟踪目标,当它停下等待时,本文算法通过帧差法就找不到目标,从而单纯使用改进的 Mean Shift 算法来跟踪,即在上一帧跟踪结果的周围进行搜索以进行匹配跟踪,从而增加算法的迭代次数。这种情况出现在很多跟踪场景中,还有类似于道路上的汽车遇到红灯停下,绿灯行驶等,但是这些情况的出现只占视频的一小部分,即使发生一种极端情况,其占用全部的视频序列,那么本文算法就完全退化为改进的 Mean Shift 算法,即使这样,本文算法的复杂度也与传统 Mean Shift 算法的复杂度相差无几,所以本文算法在总体上减少了算法的运算时间和迭代次数。另外,本文算法在设计上较好地克服了目标丢失再跟踪的问题,解决了 Mean Shift 算法的累计误差导致跟踪丢失的问题,提升了算法的鲁棒性。

4 实验结果与分析

该实验在 CPU 为 Inter I5 4590、内存为 8GB 的 PC 上使用 OPENCV2.4.9 与 VS2010 的开发平台以及 C/C++ 语言进行编程实现。

实验 1 采用简单场景下行人的视频,将传统 Mean Shift 算法与本文算法的跟踪效果进行对比。本文分别对视频序列中的第 30 帧、第 72 帧、第 105 帧进行了展示。图 3 为传统 Mean Shift 算法的跟踪效果,图 4 为本文算法的跟踪效果,表 1 列出了两者跟踪结果的对比。

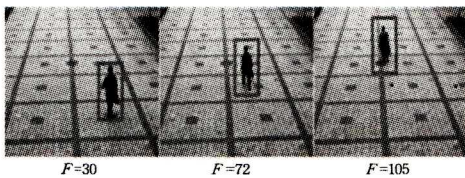


图 3 传统算法跟踪结果

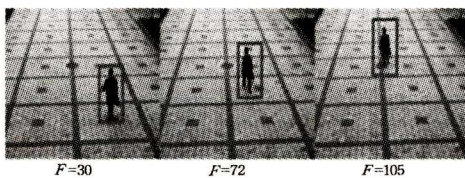


图 4 本文算法跟踪结果

表 1 跟踪指标比较

	平均匹配次数	平均匹配时间/s	跟踪准确度/%
传统算法	4.879	0.1332	77.03
本文算法	1.012	0.0763	75.34

从上述结果中可以得出,两种方法在简单场景下都能够较好地跟踪,不过本文算法在匹配次数以及匹配时间上有明显的优势。由于该视频场景简单,并且没有发生目标的遮挡等复杂情景,本文算法不需启用 Mean Shift 算法来匹配即可较好地跟踪目标。

实验 2 采用的视频是道路场景,跟踪运动速度较快的汽车,而且该车行驶过程中有背景与该车颜色相似。本文分别对视频序列中的第 5 帧、第 18 帧、第 29 帧进行了展示。图

5 示出了传统算法的跟踪效果,图 6 示出了本文算法的跟踪效果。



图 5 传统算法跟踪结果

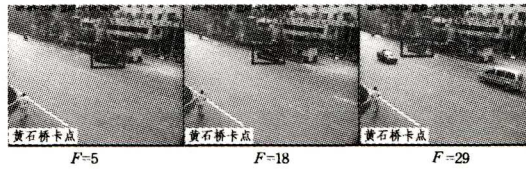


图 6 本文方法跟踪结果

从第 18 帧和第 29 帧中可以看到,传统算法在跟踪这两帧时发生了明显的偏移,而本文算法在快速运动目标的情况下仍然能够很好地跟踪,说明本文算法较好地克服了相似背景带来的干扰问题。表 2 列出了两种算法的比较结果,由于视频采用的是道路场景,因此存在多个运动目标,但是可以看出本文算法在时间方面还是优于传统算法的,另外在跟踪准确度方面也明显优于传统算法。

表 2 跟踪指标比较

	平均匹配次数	平均匹配时间/s	跟踪准确度/%
传统算法	5.242	0.0927	29.73
本文算法	2.374	0.0563	66.32

实验 3 跟踪快速运动的行人,其中发生了两次严重遮挡。本文分别对视频序列中的第 5 帧、第 15 帧、第 101 帧、第 131 帧进行了展示。图 7 示出了两种算法的跟踪结果比较,表 3 列出了两种算法的跟踪数据对比,图 8 示出了跟踪准确度的曲线图。

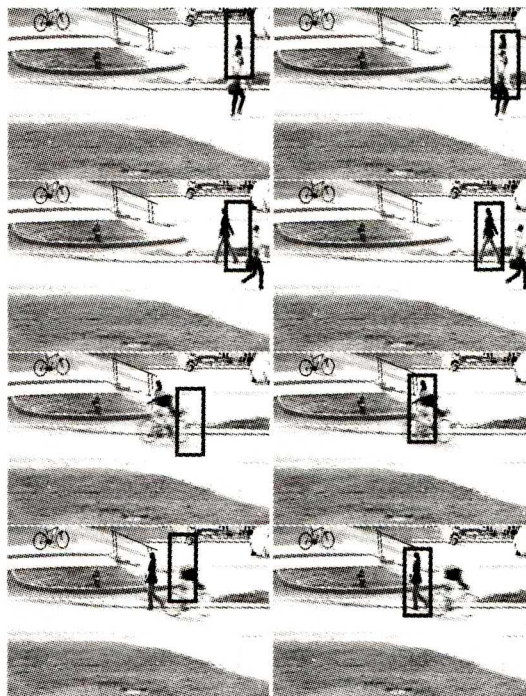


图 7 传统算法与本文算法跟踪结果比较

表3 跟踪指标比较

	平均匹配次数	平均匹配时间/s	跟踪准确度/%
传统算法	5.633	0.1157	21.93
本文算法	2.975	0.0523	67.82

从图7中可以看到,当目标在第15帧发生了遮挡之后,传统算法的跟踪结果发生了偏移,进而丢失了目标;而本文算法只在该帧跟踪时发生了一点偏差,之后又能迅速找到目标。从表3中可以看到,传统算法的跟踪准确度在该场景下很低,而且算法耗时,而本文算法在匹配次数以及所需时间上降低了约50%,准确度依然能达到一定的水准。

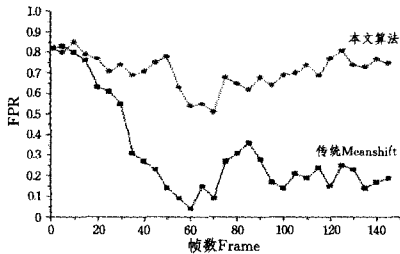


图8 跟踪实验比较示意图

另外,由图8可以看到,随着时间的推移,本文算法的跟踪准确度呈上升趋势,因为目标特征向量空间的建立是一个持续的过程,在以后的持续性跟踪中本文算法具有较大优势。

结束语 本文提出了一种新的相似性评价策略,同时融入了背景信息,有效地提高了算法的鲁棒性,并且也改善了传统算法的流程,极大地减少了算法所需时间,提升了算法的实时性。目前,本文算法只解决了一部分问题,如果跟踪目标在场景中静止不动,通过帧差法则检测不到目标,那么本文算法就退化为改进的 Mean Shift 算法,之前的预判机制就会失效,从而仅仅使用改进的 Mean Shift 算法来进行跟踪,进而就没有了目标的筛选机制,只是在一定范围内去搜寻目标,相对于预判机制生效的本文算法而言,这种情况会造成暂时的算法复杂度提升。这种现象的产生会对算法的快速性造成一定的影响,使得算法的实时性降低,同时在某种程度上影响算法跟踪的准确性,希望在后续的改进中解决这一问题。

参考文献

[1] LI X H, ZHANG T Y, SHEN X D, et al. Object tracking using

an adaptive Kalman filter combined with mean shift [J]. SPIE Journal of Optical Engineering, 2010, 49(2): 020503-020503-3.

[2] YAN J, WU M Y, CHEN S Z, et al. Anti-occlusion tracking algorithm based on Mean Shift and fragments [J]. Optics and Precision Engineering, 2010, 18(6): 1413-1419. (in Chinese)

颜佳, 吴敏渊, 陈淑珍, 等. 跟踪窗口自适应的 Mean Shift 跟踪 [J]. 光学精密工程, 2010, 18(6): 1413-1419.

[3] SHEN C H, BROOKS M J, VAN DEN HENGEL A. Fast Global Kernel Density Mode Seeking: Applications to Localization and Tracking [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(5): 1457-1469

[4] MAGGIO E, CAVALLARO A. Multi-part target representation for color tracking [C] // IEEE International Conference on Image Processing. 2005: 729-732.

[5] LIANGFU L, ZUREN F, et al. A coarse-to-fine kernel matching approach for mean shift based visual tracking [J]. Opto-Electronics Review, 2007, 17(1): 65-71.

[6] WANG T, LIU W N, HAN W L, et al. Target tracking algorithm based on improved mean shift [J]. Chinese Journal of Liquid Crystals and Displays, 2012, 27(3): 396-400. (in Chinese)

王田, 刘伟宁, 韩伟良, 等. 基于改进 Mean Shift 的目标跟踪算法 [J]. 液晶与显示, 2012, 27(3): 396-400.

[7] COLLINS R T, YANX L, LEORDEANU M. Online selection of discriminative tracking features [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(10): 1631-1643.

[8] ADAM A, RIVLIN E, SHIMSHON L. Robust fragments-based tracking using the integral histogram [C] // IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2006: 798-805.

[9] HAO X B. Background modeling and dynamic partition based object tracking [J]. Electronics R&D, 2010, 37(10): 21-23. (in Chinese)

韩晓波. 基于背景建模和动态分块的目标跟踪 [J]. 电子技术研发, 2010, 37(10): 21-23.

[10] LI S X, CHANG H X, ZHU C F. Adaptive pyramid mean shift for global real-time visual tracking [J]. Image and Vision Computing, 2010, 28(3): 424-437.

(上接第258页)

[11] ZHANG Y C, LIU Y, ZHANG H F, et al. The research of information dissemination model on online social network [J]. Acta Phys. Sin, 2011, 60(5): 050501-1-7. (in Chinese)

张彦超, 刘云, 张海峰, 等. 基于在线社交网络的信息传播模型 [J]. 物理学报, 2011, 60(5): 050501-1-7.

[12] SU X P, SHEN Q, Song Y R, et al. Improving the efficiency of viral marketing in a social network using influential nodes [J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2014, 35(8): 1803-1807. (in Chinese)

苏晓萍, 申情, 宋玉蓉, 等. 利用社会网络上最有影响力节点实现高效病毒营销 [J]. 小型微型计算机系统, 2014, 35(8): 1803-1807.

[13] YUAN W G, LIU Y, CHENG J J, et al. Empirical analysis of microblog centrality and spread influence based on Bidirectional connection [J]. Acta Phys. Sin, 2013, 62(3): 038901-1-10. (in Chinese)

苑卫国, 刘云, 程军军, 等. 微博双向“关注”网络节点中心性及传播影响力的分析 [J]. 物理学报, 2013, 62(3): 038901-1-10.

[14] BRIN S, PAGE L. The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine [J]. Computer Networks and ISDN Systems, 2012, 30(1): 107-117.

[15] LEI J, CHEN L, FU H. Distributed Randomized PageRank Algorithm Based on Stochastic Approximation [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(6): 1641-1646.