

CP-nets 学习的复杂度

刘惊雷^{1,2} 廖士中¹

(天津大学计算机科学与技术学院 天津 300072)¹ (烟台大学计算机与控制工程学院 山东烟台 264005)²

摘要 CP-nets 是一种简单且直观的图形化偏好表示工具,其表示、推理和学习是 3 个基本问题。不同于基于统计学习理论的研究方法,文中基于逻辑理论来研究二值 CP-nets 的学习问题。首先,建立命题公式的可满足性和 CP-nets 表示的偏好公式之间的联系,将 CP-nets 的学习问题转化为命题的推理问题。随后,给出两类具有特殊结构的 CP-nets 的学习问题的计算复杂度,其中最复杂的无环 CP-nets 上的学习问题是 NP-complete,而最简单的集合结构 CP-nets 上的学习问题是 P 。这些结论给出了 CP-nets(如链结构、有界树宽)学习问题复杂度的上下界。

关键词 二值条件偏好网,推理与学习,命题公式的可满足性,有界树宽的 CP-nets,复杂度的上下界

中图分类号 TP182 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.06.038

Complexity of CP-nets Learning

LIU Jing-lei^{1,2} LIAO Shi-zhong¹

(School of Computer Science and Technology, Tianjin University, Tianjin 300072)¹

(School of Computer and Control Engineering, Yantai University, Yantai, Shandong 264005)²

Abstract CP-nets (Conditional Preference networks) are a kind of simple and intuitively graphical tool for representing conditional preference, three fundamental research questions of which are representation, reasoning and learning. Differently from the research point from statistical learning theory, the binary-valued CP-nets learning issues were studied based on logic theory. Firstly, an intimate relationship between satisfiability of proposition logic formula and preference assertion is given, therefore, the learning problem on CP-nets is transformed into the proposition reasoning. In the second place, the computational complexity for learning two kinds of specific CP-nets is given, the learning problem of most complicated acyclic CP-nets is NP-complete, whereas the learning problem of the simplest set-structured CP-nets is P . These interesting results establish the upper and lower bound of complexity for learning specific structured (e. g., list-structured, bounded tree-width) CP-nets.

Keywords Binary-valued conditional preference networks, Reasoning and learning, Satisfiability of propositional formula, Bounded tree-width CP-nets, Upper and lower bound of complexity

1 引言

偏好出现在个体(单 agent)和群体(多 agent)决策的各种场景中。例如,单个 agent 想要实现目标时,需要在各种可选方案中选择一种最可行的方案;多 agent 系统进行群体决策时,须将多个 agent 的不同方案聚合成一种集体方案,且尽可能地满足每个个体的偏好^[1]。

Agent 偏好主要通过图形语言来表示^[2],CP-nets(Conditional Preference networks)^[3-4]是其中一种流行的图形表示工具。目前,CP-nets 的理论研究主要集中在偏好表示^[5]、推理^[6]和学习^[7]这 3 类问题上。

偏好学习研究如何学习和获取个体的偏好,其本质是通过给定的样例集来进行序的学习。Koriche 提出了利用等价查询(Equivalence Query)和成员查询(Membership Query)来

获取 agent 条件偏好的 CP-nets 模型。其中,等价查询是一种被动学习方法;而成员查询是一种主动学习方法^[8],它充分利用有代表性的样本^[9]来加速收敛到所求的 CP-nets 模型。Lang 以最简单的一类属性可分离的 CP-nets 为例,给出了 CP-nets 上的 3 类兼容学习——蕴含兼容(Implication Compatible)、强兼容(Strong Compatible)和弱兼容(Weak Compatible)^[10]。Dimopoulos 给出了一种能够预测未知偏好的学习算法,该学习算法具有很强的理论假设,即必须在满足透明蕴含的条件下才可蕴含学习^[11];但该文献既没有给出透明蕴含满足的条件,也没有给出透明蕴含的实际意义,其唯一作用在于降低学习的复杂度。

本文的特色和贡献如下:

1)从逻辑推理^[12]的角度来研究 CP-nets 图模型的学习问题,指出二值 CP-nets 的蕴含学习问题本质上是一个逻辑推

到稿日期:2017-05-30 返修日期:2017-06-30 本文受国家自然科学基金(61673293,61572419,61773331)资助。

刘惊雷(1970—),男,博士生,副教授,CCF 会员,主要研究方向为人工智能基础、理论计算机科学;廖士中(1964—),男,教授,博士生导师,CCF 会员,主要研究方向为人工智能基础、理论计算机科学,E-mail:shizhongliao@tju.edu.cn(通信作者)。

理问题,从而建立 CP-nets 的学习问题和命题逻辑公式之间的联系。

2) 通过从命题逻辑中的 3-SAT 问题向无环 CP-nets 的归约,证明了最复杂的无环 CP-nets 的学习问题的复杂度为 NP-complete(参见定理 1)。该复杂度确定了学习其他具有特殊结构 CP-nets 的复杂度上界。

3) 通过从集合结构 CP-nets 上的学习问题向命题逻辑中的简单合取式的等价转化,证明了最简单的集合结构上的 CP-nets 的学习问题复杂度是 P(参见定理 3)。该复杂度确定了学习其他具有特殊结构的 CP-nets 的复杂度下界。

本文利用逻辑推理的方法来研究两类具有特殊结构的 CP-nets 的学习问题,即求解无环 CP-nets 以及集合结构 CP-nets 上的蕴含学习的复杂度。第 1 节给出了偏好学习的相关工作和存在的问题;第 2 节介绍了 CP-nets 的语法和语义;第 3 节研究无环 CP-nets 的学习问题;第 4 节研究集合结构 CP-nets 的学习问题;最后总结全文并给出未来的工作方向。

2 CP-nets 的基础知识

2.1 条件偏好网

定义 1 设 $V = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 是决策属性集, $Dom(X_i)$ 为 X_i 的有限定义域,决策空间 $\Omega = \times_{i=1}^n Dom(X_i)$ 表示所有属性组合。若配置 $o, o' \in \Omega$ 仅有一个属性值不同,而其他属性值都相同,则称 o 和 o' 为可交换的配置。若对属性 X_i 的偏好依赖于 X_j ,则称 X_j 是 X_i 的一个父亲,用 $Pare(X_i)$ 表示 X_i 的父亲集。CPT(X_i) 为属性 X_i 的条件偏好表(Conditional Preference Table),表示 X_i 在其父属性 $Pare(X_i)$ 的不同取值下 agent 对 $Dom(X_i)$ 集合的一个排序。在 $Pare(X_i)$ 所有不同取值下,agent 对 X_i 取值的排序构成 CPT(X_i)。

定义 2 CP-nets 是一个有向标记图 $N = (V, CE)$,其中 V 是顶点集,CE 为有向边集,每个顶点 X_i 都有 CPT(X_i) 与其关联。

例 1 下面给出最简单的集合结构 CP-nets 以及较复杂的无环结构 CP-nets 作为实例。

1) 一个集合结构 CP-nets $N = (V, CE)$ 如图 1 所示,其中 $V = \{A, B, C\}, CE = \emptyset, Dom(A) = \{a_1, a_0\}, Dom(B) = \{b_1, b_0\}, Dom(C) = \{c_1, c_0\}$ 。这 3 个顶点的条件偏好表标注在图 1 中各个顶点的下方。

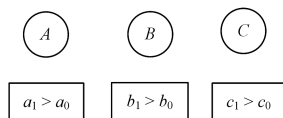


图 1 3 个顶点的集合结构 CP-nets
Fig. 1 CP-nets set with three vertices

2) 一个包含 4 个顶点的无环 CP-nets $N = (V, CE)$ 如图 2 所示,其中 $V = \{A, B, C, D\}, CE = \{(A, C), (B, C), (C, D)\}, Dom(A) = \{a, \bar{a}\}, Dom(B) = \{b, \bar{b}\}, Dom(C) = \{c, \bar{c}\}, Dom(D) = \{d, \bar{d}\}$ 。每个顶点的条件偏好表标注在图 2 各个顶点的旁边。

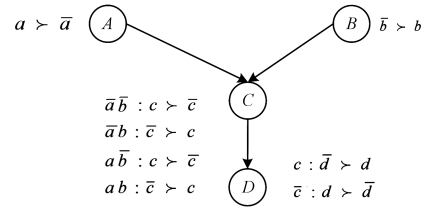


图 2 4 个顶点的无环 CP-nets
Fig. 2 Acyclic CP-nets with four vertices

在 CP-nets 的推理任务中,任意两个配置之间的占优查询的复杂度为 PSPCAE-complete^[13]。但对于可交换配置而言,有如下结论。

命题 1 设 $N = (V, CE)$ 是一个无环 CP-nets,若配置 o_1 与 o_2 是可交换的配置,则在 $O(n)$ 内可确定出 $o_1 > o_2$ 或者 $o_2 > o_1$ ^[6]。

2.2 CP-nets 的蕴含学习问题

定义 3 设 E 为成对比较(Pairwise Comparisons)^[14] 的样例集,即 $E = \{(o_1, o_2) \mid o_1, o_2 \in \Omega \wedge o_1 > o_2\}$; \mathcal{N} 为所有无环 CP-nets 集合,即 $\mathcal{N} = \{N \mid N = (V, CE)\}$ 为 n 个顶点的无环条件偏好网。若 $\exists N \in \mathcal{N}$ 使得 $E \subseteq >_N$,即所给的样本偏好集 E 是 N 诱导的偏好集 $>_N$ 的子集,则称 E 可蕴含学习(Implication Learnability); E 是否可蕴含学习的问题被记作 ImLearning。其中, $>_N$ 是 CP-nets 导出图的传递闭包^[5]。

下面给出无环 CP-nets 上 ImLearning 的计算复杂度的求解过程。

3 无环 CP-nets 的学习复杂度

由定义 3 可知,蕴含学习的本质是在所有无环 CP-nets 中寻找一个 N ,使其导出图的传递闭包 $>_N$ 是输入样本 E 的超集,即任何一个偏好断言被 N 所蕴含。遗憾的是,无环 CP-nets 的蕴含学习问题是困难的。

定理 1 从样本集 E 中学习无环 CP-nets 是 NP-complete。

若要证明一个问题是 NP-complete,则须证明其具有“Membership”和“Hardness”特性。定理 1 中的“Membership”特性是由 3.3 节中构造的可交换的样本集 $E[\varphi]$ 以及命题 1 来保障,因此下文的重点是确保定理 1 中的“Hardness”特性是成立的。定理证明的思路是通过构造法,将命题逻辑中的 3-SAT 上的可满足问题^[15] 归约为无环 CP-nets 上的学习问题。为此,首先利用给定的 3-CNF 公式 φ 构造 CP-nets 的顶点集 V 、边集 CE 、条件偏好表 CPT 以及样本集 E 。

3.1 CP-nets 顶点集和边集的构造

CP-nets 的顶点集 V 的构造较简单,其一共包含 3 类顶点:子句属性顶点和正负原子属性顶点。即在命题合取范式 $\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$ 中,每个子句 C_i 对应 CP-nets 的一个属性,称作 CP-nets 的子句属性;而每个原子 P 及其负原子 \bar{P} 各对应 CP-nets 的一个属性 X_P 和 $X_{\bar{P}}$,分别称作 CP-nets 的正原子属性和负原子属性。正原子属性和负原子属性统称为原子属性,所有属性顶点记作 $V[\varphi]$ 。

构造 CP-nets 边集 CE 的核心是确定每个属性的父亲集。由于所构造的 CP-nets 有 3 类属性顶点,因此下面分别构造

每类属性顶点的父亲集。

规则 1 CP-nets 中每个属性 $X \in V[\varphi]$ 的父亲集 $Pare(X)$ 的求解方式如下:

1)若 X 为子句属性,则 $Pare(X_{C_i}) = \{X_P | P \in C_i\} \cup \{X_{\bar{P}} | \bar{P} \in C_i\}$,即子句属性的父亲为其包含的原子或负原子。

2)若 X 为原子属性,则 $Pare(X_P) = Pare(X_{\bar{P}}) = \emptyset$,即正负原子属性都无父亲。

例 2 给定命题公式 $\varphi = C_1 \wedge C_2 = (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (Q \vee \neg R \vee \neg S)$,则构造出的 CP-nets 属性集中包含 2 个子句属性 X_{C_1} 和 X_{C_2} , 3 个原子属性 X_P, X_Q, X_R 以及 3 个负原子属性 $X_{\bar{Q}}, X_{\bar{R}}, X_{\bar{S}}$,这 8 个属性顶点构成命题公式 φ 所诱导的属性集 $V[\varphi]$,即 $V[\varphi] = \{X_{C_1}, X_{C_2}, X_P, X_Q, X_R, X_{\bar{Q}}, X_{\bar{R}}, X_{\bar{S}}\}$ 。

每个属性的父亲集的构造方式如下:

$$Pare(X_{C_1}) = \{X_P, X_{\bar{Q}}, X_R\}$$

$$Pare(X_{C_2}) = \{X_Q, X_{\bar{R}}, X_{\bar{S}}\}$$

$$Pare(X_P) = Pare(X_Q) = Pare(X_R) = \emptyset$$

$$Pare(X_{\bar{Q}}) = Pare(X_{\bar{R}}) = Pare(X_{\bar{S}}) = \emptyset$$

显然,以这种方式构造的父亲集无法形成环路,且每个属性的父亲数目小于 3,因此所构造的是无环图。2 个子句属性和 6 个原子属性构造的 CP-nets 的依赖结构如图 3 所示,它是在所有原子属性集到所有子句属性集之间的一个有向二部图,因此是一个有向无环图。

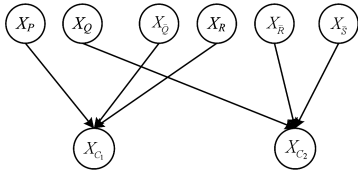


图 3 从合取范式生成的无环 CP-nets 结构

Fig. 3 Acyclic structure of CP-nets generated from CNF

由图 3 可知,子句属性的父亲集为不同的正负原子属性,原子属性的父亲为空。

3.2 条件偏好表的构造

二值 CP-nets 的每个属性只有两个取值,对于属性 X 来说, $Dom(X) = \{x_1, x_0\}$,其中 x_1 代表属性 X 的第 1 个取值为真, x_0 代表属性 X 的第 2 个取值为假。对上述方法所构造的 CP-nets 依赖图而言,可按如下方式构造属性 X 的 $CPT(X)$ 。

规则 2 $X \in V[\varphi]$ 是根据规则 1 生成的属性集,可按如下方式构造属性 X 的 $CPT(X)$:

1)当 X 是子句属性顶点 X_{C_i} 时,若其所有的父亲取值为假,即 $\sigma(Pare(X)) = 0$,则所构造的规则体为 $x_{C_i}^0 > x_{C_i}^1$;若其中一个父亲取值为真,即 $\sigma(Pare(X)) = 1$,则所构造的规则体为 $x_{C_i}^1 > x_{C_i}^0$,其中 $\sigma()$ 为赋值函数。

2)当 X 是原子属性顶点 X_{A_j} 时,则正原子属性 X_{A_j} 所构造的规则体为 $x_{A_j}^1 > x_{A_j}^0$,即真比假好;负原子属性 $X_{\bar{A}_j}$ 所构造的规则体为 $x_{\bar{A}_j}^0 > x_{\bar{A}_j}^1$,即假比真好。

上述构造 CPT 的方法的一个基本思想是:利用 3-SAT 中的 m 个子句生成 m 个样本断言(共 m 个子句,一个子句对应一个样本断言),并确保每个样本断言都能满足命题公式。此处的关键思想是确保一个子句只生成一个样本,这是通过

在子句属性中其有一个父亲取值为真来保证的。因为每个子句是文字的析取。

3.3 样本集 E 的构造

用 $C[\varphi]$ 表示命题公式 φ 中的所有子句, $E[C_i]$ 表示子句 C_i 对应的一个成对比较, $E[\varphi]$ 表示公式 φ 中所有子句对应的样本集,则:

$$E[\varphi] = \{x_{C_i}^1 x_j > x_{C_i}^0 x_j | C_i \in C[\varphi]\}$$

其中, $x_j \in Dom(V[\varphi] - \{X_{C_i}\})$ 。

在例 2 中, CNF 中的子句 C_1 对应的一个成对比较断言 $E[C_1]$ 为 $x_{C_1}^1 x_C^1 x_P^1 x_{\bar{Q}}^1 x_R^0 x_{\bar{R}}^0 x_{\bar{S}}^0 > x_{C_1}^0 x_C^1 x_P^1 x_{\bar{Q}}^1 x_R^0 x_{\bar{R}}^0 x_{\bar{S}}^0$; 子句 C_2 对应的一个成对比较断言 $E[C_2]$ 为 $x_{C_2}^1 x_C^0 x_Q^0 x_{\bar{R}}^1 x_{\bar{S}}^0 > x_{C_2}^0 x_C^0 x_Q^0 x_{\bar{R}}^1 x_{\bar{S}}^0$ 。

3.4 构造方法的正确性证明

本文利用 CNF 公式 φ 来构造样本 E 以及无环 CP-nets N 。由于样本集 E 和 CPT 都是偏好断言,因此正确性证明需要从原先的命题公式 φ 推导出所有的样本集 E 和 CPT,即: $\varphi \Rightarrow E[\varphi], \varphi \Rightarrow CPT(X)_{X \in V[\varphi]}$ 。

首先证明所构造的 CP-nets N_3 (父亲个数为 3) 蕴含构造出的样本集中的每个偏好断言,也蕴含 CP-nets 中的每个偏好规则。然后,再证明 CP-nets N_3 蕴含 3-SAT 公式。

不难看出,构造样本集 $E[\varphi]$ 所消耗的时间是公式 φ 长度的多项式函数,因此从 φ 到 $E[\varphi]$ 的转换是多项式时间归约。下面证明该归约可把 3-SAT 正确地归约到 ImLearning 问题,也就是说,包含 m 个子句的 3-SAT 公式 φ 是可满足的,当且仅当 N_3 蕴含规模为 m 的样本偏好断言 $E[\varphi]$ 。

证明:1) (“当”的证明)需要证明,在 CP-nets N_3 蕴含 $E[\varphi]$ 的前提下, φ 是可满足的,即存在某种赋值 σ ,使得公式中的所有子句 $C_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 都为真。首先,从样本集 $E[\varphi]$ 中取一个样本断言 $x_{C_i}^1 x > x_{C_i}^0 x, x \in Dom(V[\varphi] - \{X_{C_i}\})$,找出取值不同的属性为 X_{C_i} ,然后在 N 中找到顶点 X_{C_i} ,进而找到 $Pare(X_{C_i})$,通过 $Pare(X_{C_i})$ 可得到 X_{C_i} 的 3 个父亲顶点集 $\{X_{A_j} | X_{A_j} \in Pare(X_{C_i})\}$ 。对于每一个原子属性顶点 X_{A_j} 而言,查找其条件偏好表 $CPT(X_{A_j})$ 。若其中的规则为 $x_{A_j}^1 > x_{A_j}^0$,则命题变量 A_j 的赋值为真;若规则为 $x_{A_j}^0 > x_{A_j}^1$,则命题变量 A_j 的赋值为假。该命题变量的取值保证了子句 C_i 为真,于是命题公式 φ 是可满足的。

2) (“仅当”的证明):假定 φ 是可满足的,即存在某种赋值 σ ,使得公式中的所有子句 $C_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 为真。由于 C_i 为真,则其包含的 3 个原子变量必定有一个为真。若在所构造的 CP-nets 中找到子句属性 X_{C_i} 时,即可得到 $CPT(X_{C_i})$,进而从 $CPT(X_{C_i})$ 中可以查找到父亲属性有一个为真的行,然后从该行的规则头和规则体诱导一个偏好断言,该偏好集合显然蕴含 $E[C_i]$ 。

4 集合 CP-nets 的学习复杂度

对于集合结构 CP-nets 的学习,首先将偏好断言等价转换为命题公式中的简单合取式。

4.1 学习问题与简单合取式的关系

定义 4 设 E 是样本集, $e = o_1 > o_2 \in E$ 是一个样本,则称 $C(e) = (\bigwedge_{x_i \in o_1 - o_2} x_i) \wedge (\bigwedge_{\bar{x}_i \in o_1 - o_2} \bar{x}_i)$ 为样本 e 对应的简单合取式;称 $C(E) = \bigwedge_{e \in E} C(e) = (\bigwedge_{e \in E} \bigwedge_{x_i \in o_1 - o_2} x_i) \wedge (\bigwedge_{e \in E}$

$\bigwedge_{\bar{x}_i \in o_1 - o_2} \bar{x}_i$) 为样本集 E 对应的简单合取式。其中, $o_1 - o_2$ 表示属性取值落在 o_1 而不落在 o_2 上的属性值集。

命题 2 设 N 是集合结构的二值 CP-nets, 若 $o_1, o_2 \in \Omega$, 则 $o_1 \succ o_2$ 的充要条件是:

- 1) 若对任意 $x_i \in o_1 - o_2$, 则 $CPT(X_i) = \{x_i \succ \bar{x}_i\}$;
- 2) 若对任意 $\bar{x}_j \in o_1 - o_2$, 则 $CPT(X_j) = \{\bar{x}_j \succ x_j\}$ 。

证明: 对于集合结构 CP-nets 而言, 任何两个属性之间都没有依赖关系。

1) 若 $|o_1 - o_2| = 1$, 不妨令 $o_1 - o_2 = x_i$, 此时, $o_1 \succ o_2$ 等价于 $o_1(X_i) \succ o_2(X_i)$, 其中 $o_1(X_i)$ 与 $o_2(X_i)$ 分别代表属性 X_i 在配置 o_1 与 o_2 上的投影。此时, 若 $o_1(X_i) = x_i$, 则 $o_2(X_i) = \bar{x}_i$, 根据 $o_1(X_i) \succ o_2(X_i)$, $x_i \succ \bar{x}_i$, 若 $o_1(X_j) = \bar{x}_j$, 则 $o_2(X_j) = x_j$, 同样根据 $o_1(X_j) \succ o_2(X_j)$, 有 $\bar{x}_j \succ x_j$ 。反之, 若 $x_i \in o_1 - o_2$ 且 X_i 的条件偏好表为 $x_i \succ \bar{x}_i$, 此时 $o_1(X_i) = x_i, o_2(X_i) = \bar{x}_i$, 由于 o_1 与 o_2 仅在 X_i 取值不同且 $x_i \succ \bar{x}_i$, 因此根据 Ceteris Paribus 语义^[16-18]可知 $o_1 \succ o_2$ 。

2) 当 o_1 和 o_2 中取值不同的属性数目为 $m(m > 1)$ 时, 由于任意属性之间都没有依赖关系, 因此可将 m 对属性串行分解成 m 个步骤, 且每个步骤的分析与 1) 相同。

引理 1 给定样本 $e = o_1 \succ o_2 (o_1 \neq o_2)$, \succ_N 是集合 CP-nets 模型 N 所诱导的偏序集^[5], 则 $o_1 \succ_{N O_2} \iff C(e)$ 为可满足式。

证明: 若 $o_1 \succ_{N O_2}$, 根据命题 2 知, 若 $o_1 - o_2$ 非空且 $CPT(X_i)$ 为 $x_i \succ \bar{x}_i$, 则 $p \in o_1 - o_2$ 是正原子; 若 $CPT(X_i)$ 为 $\bar{x}_i \succ x_i$, 则 $p \in o_1 - o_2$ 是负原子。若 $p = x_i \in o_1 - o_2$ 是正原子, 则令 X_i 为真; 若 $p = \bar{x}_j \in o_1 - o_2$ 是负原子, 则令 X_j 为假。这样的赋值使得 $C(e) = \bigwedge_{p \in o_1 - o_2} p$ 成真, 因此 $C(e)$ 是可满足式。反之, 若 $e = o_1 \succ o_2$ 并且简单合取式 $C(e) = \bigwedge_{p \in o_1 - o_2} p$ 为可满足式, 则取 $C(e)$ 的成真赋值 σ 。此时, 若 $x_i = 1$, 则构造的 $CPT(X_i)$ 为 $x_i \succ \bar{x}_i$; 若 $x_i = 0$, 则构造的 $CPT(X_i)$ 为 $\bar{x}_i \succ x_i$ 。根据命题 2 可知 $o_1 \succ_{N O_2}$, 即 $C(e)$ 可满足保证了 $o_1 \succ_{N O_2}$ 。

引理 2 设 N 是集合结构的 CP-nets, $o_1, o_2 \in \Omega$ 且 $o_1 \neq o_2$, 则在 $O(n)$ 内可判定 $o_1 \succ_{N O_2}$ 或者 $o_2 \succ_{N O_1}$ 。

证明: 根据命题 2, 若想判断 $o_1 \succ_{N O_2}$, 则需要计算 $o_1 - o_2$, 而计算 $o_1 - o_2$ 的复杂度为 $O(n)$ 。另外, 判断 $x_i \in o_1 - o_2$ 或 $\bar{x}_i \in o_1 - o_2$ 也需要 $O(n)$ 的复杂度, 因此整个步骤需要 $O(n) + O(n) = O(n)$ 。

定理 2 若 E 是样例集, 则集合结构 CP-nets 可蕴含学习的充要条件是, E 所对应的简单合取式 $C(E)$ 是可满足式。

证明: 1) (必要性) 由于 E 可蕴含学习, 因此存在集合 CP-nets N 蕴含所有样例 ($E \subseteq \succ_N$), 即对任意样本 e 满足 $o_1 \succ_{N O_2}$ 。根据引理 1, $C(e)$ 为可满足式, 于是 E 对应的 $C(E)$ 也可满足(可满足式的合取仍然是可满足式)。

2) (充分性) 若 E 所对应的简单合取式 $C(E)$ 可满足, 则 $C(E)$ 中不会出现两个相反的文字(因为两个相反的文字的合取为假, 如 $x_i \wedge \bar{x}_i = 0$ 与 $C(E)$ 是可满足式矛盾), 取 $C(E)$ 的一个成真赋值, 根据该成真赋值构造 N 的条件偏好表。若成真赋值中 $x_i = 1$, 则构造的 $CPT(X_i)$ 为 $x_i \succ \bar{x}_i$; 若 $x_i = 0$ (即 $\bar{x}_i = 1$), 则构造的 $CPT(X_i)$ 为 $\bar{x}_i \succ x_i$, 此时可以构造出该 CP-

nets N 。同样, 在该成真赋值下, 每个样本所对应的子句 $C(e)$ 也为真, 根据引理 1, $(\forall e) C(e)$ 为真蕴含 $(\forall e) o_1 \succ_{N O_2}$, 即 $C(E)$ 可满足保证了可以构造相应的 N , 且蕴含样例集 E , 即 $C(E)$ 可满足保证了 E 可蕴含学习。

4.2 集合 CP-nets 学习问题的复杂度

定理 3 若 E 是样例集, 则对集合结构 CP-nets 进行蕴含学习的时间复杂度为 P 。

证明: 所有样本 E 所对应的简单合取式 $C(E)$ 可在 $O(|E|)$ 时间内构造完成。根据引理 2, 判断是否蕴含一个样本 $e \in E$ 的时间复杂度为 $O(n)$, 而现在整个样本集包含 $|E|$ 个样本, 因此判断是否蕴含所有样本 E 的时间复杂度为 $O(|E| * n)$, 它表示学习问题的时间代价正比于样本集的大小 $|E|$ 与属性集 V 的大小 n 的乘积。因此, 蕴含学习的时间复杂度为多项式复杂度, 即对集合结构 CP-nets 进行蕴含学习的时间复杂度为 P 。

结束语 本文从逻辑推理的角度研究了两类具有特殊结构的 CP-nets 的学习问题, 证明了无环 CP-nets 学习是 NP-complete。本文所列的两类具有特殊结构的 CP-nets 是最简单和最复杂的结构, 因此本文的复杂度结论是其他 CP-nets 学习问题的复杂度的上下界。

进一步的研究方向包括: 1) 研究具有星型结构(称作 Naive CP-nets)、单链结构和有界树宽^[19]结构的 CP-nets 学习问题的复杂度; 2) 从图模型的角度来研究 CP-nets 的学习问题。可以借鉴贝叶斯网络的学习方法^[20]来设计一个无环 CP-nets 上的精确学习算法, 例如可以采用动态规划法从样本集中构造一个无环 CP-nets。

参 考 文 献

- [1] DOMSHLAK C, HULLERMEIER E, KACI S, et al. Preferences in AI: An Overview [J]. Artificial Intelligence, 2011, 175(7/8): 1037-1052.
- [2] BOUTILIER C, BRAFMAN R, DOMSHLAK C, et al. CP-nets: A Tool for Representing and Reasoning with Conditional Ceteris Paribus Preference Statements [J]. Journal of artificial intelligence research, 2004, 21(1): 135-191.
- [3] MATTEI N, PINI M S, ROSSI F, et al. Bribery in Voting with CP-nets [J]. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 2013, 68(1): 1-26.
- [4] ALANNAZI E, MOUHOUB M, ZILLES S. The Complexity of Learning Acyclic Cp-nets [C] // The 25th International Joint Conference on Artificial Intelligence. New York, 2016: 1361-1367.
- [5] LIU J L, LIAO S Z. Expressive Efficiency of Two Kinds of Specific CP-nets [J]. Information Sciences, 2015, 295(2): 379-394.
- [6] LIU J L, LIAO S Z, ZHANG W. On the Completeness and Consistency for CP-nets [J]. Journal of Software, 2012, 23(6): 1531-1541. (in Chinese)
- 刘惊雷, 廖士中, 张伟. CP-nets 的完备性及一致性研究 [J]. 软件学报, 2012, 23(6): 1531-1541.
- [7] LIU J T, XIONG Y, WU C H, et al. Learning Conditional Preference Networks from Inconsistent Examples [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2014, 26(2): 376-390.
- [8] KOROCHE F, ZANNUTTINI B. Learning Conditional Preferen-

- ce Networks [J]. *Artificial Intelligence*, 2010, 174(11): 685-703.
- [9] HUANG S J, JIN R, ZHOU Z H. Active Learning by Querying Informative and Representative Examples [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2014, 36(10): 1936-1949.
- [10] LANG J, MENGIN J. The Complexity of Learning Separable Ceteris Paribus Preferences [C]// *Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence*. 2009: 848-853.
- [11] DIMOPOULOS Y, MICHAEL L, ATHIENITOU F. Ceteris Paribus Preference Elicitation with Predictive Guarantees [C]// *Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence*. 2009: 1890-1895.
- [12] MUGGLETON S, MARGINEAN F. Logic-based Machine Learning [M]// *Logic-based Artificial Intelligence*. Springer US, 2000: 315-330.
- [13] GOLDSMITH J, LANG J, TRUSZCZYNSKI M, et al. The Computational Complexity of Dominance and Consistency in CP-nets [J]. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 2008, 33(1): 403-432.
- [14] LU T, BOUTILIER C. Effective Sampling and Learning for Mallows Models with Pairwise Preferences Data [J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2014, 16(12): 3783-3829.
- [15] COJAOGLAN A. Belief Propagation Guided Decimation Fails on Random Formulas [J]. *Journal of the ACM*, 2017, 63(6): 1-49, 55.
- [16] OBIEDKOV S. Parameterized Ceteris Paribus Preferences Over Atomic Conjunctions under Conservative Semantics [J]. *Theoretical Computer Science*, 2016, 658(1): 375-390.
- [17] DAVIDE G, EMILIANO L, FRANCOIS S. The Ceteris Paribus Structure of Logics of Game Forms [J]. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 2015, 53(1): 91-126.
- [18] BENTHEM V, GIRARD P, ROY O. Everything Else Being Equal: A Modal Logic for Ceteris Paribus Preferences [J]. *Journal of Philosophical Logic*, 2009, 38(1): 83-125.
- [19] GOTTLÖB G, PICHLER R, WEI F. Bounded Treewidth as a Key to Tractability of Knowledge Representation and Reasoning [J]. *Artificial Intelligence*, 2010, 174(1): 105-132.
- [20] ZHOU L, WANG L, LIU L, et al. Learning Discriminative Bayesian Networks from High-dimensional Continuous Neuroimaging Data [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2016, 38(11): 2269-2283.

(上接第 196 页)

文中的 3 种算法均需要秩 r 作为先验知识,而通常秩 r 未知,因此未来将探索需要更少先验知识的快速算法。

参 考 文 献

- [1] RENNIE J, SREBRO N. Fast maximum margin matrix factorization for collaborative prediction [C]// *22th International Conference on Machine Learning (ICML)*. 2005: 713-719.
- [2] KILIAN Q W, LAWRENCE K S. Unsupervised learning of image manifolds by semidefinite programming [C]// *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2004: 988-995.
- [3] ARGYRIOU A, EVGENIOU T, PONTIL M. Convex multi-task feature learning [J]. *Machine Learning*, 2008, 73(3): 243-272.
- [4] ARGYRIOU A, EVGENIOU T, PONTIL M. Convex multi-task feature learning [C]// *Proceedings of the Neural Information Processing Systems Conference (NIPS)*. 2006: 41-48.
- [5] FAZEL M. *Matrix Rank Minimization with Applications* [D]. California: Stanford University, 2002.
- [6] CAI J F, EMMANUEL J C, SHEN Z W. A singular value thresholding algorithm for matrix completion [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, 20(4): 1956-1982.
- [7] JI S, YE J. An accelerated gradient method for trace norm minimization [C]// *26th International Conference on Machine Learning (ICML)*. 2009: 457-464.
- [8] LIU J J, SUN D, TOH K C. An implementable proximal point algorithmic framework for nuclear norm minimization [J]. *Mathematical Programming*, 2012, 133(1): 399-436.
- [9] TOH K C, YUN S. An accelerated proximal gradient algorithm for nuclear norm regularized least squares problems [J]. *Pacific Journal of Optimization*, 2010, 6(3): 615-640.
- [10] SHAI S S, GONEN A, SHAMIR O. Large-scale convex minimization with a low-rank constraint [C]// *28th International Conference on Machine Learning (ICML)*. 2011: 329-336.
- [11] WANG Z, LAI M J, LU Z S, et al. Orthogonal rank-one matrix pursuit for low-rank matrix completion [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2015, 37(1): 488-514.
- [12] ZHANG X H, DALE S, YU Y L. Accelerated training for matrix-norm regularization: A boosting approach [C]// *Proceedings of the Neural Information Processing Systems Conference (NIPS)*. 2012: 2906-2914.
- [13] MARTIN J, MAREK S. A simple algorithm for nuclear norm regularized problems [C]// *27th International Conference on Machine Learning (ICML)*. 2010: 471-478.
- [14] LEE K, BRESLER Y. *Admira: atomic decomposition for minimum rank approximation* [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(9): 4402-4416.
- [15] MEKA R, JAIN P, DHILLON I S. Guaranteed Rank Minimization via Singular Value Projection [C]// *Proceedings of the Neural Information Processing Systems Conference (NIPS)*. 2010: 937-945.
- [16] TANNER J, WEI K. Normalized iterative hard thresholding for matrix completion [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2010, 35(5): 4402-4416.
- [17] DEANNA N, JOEL A T. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, 26(3): 301-321.
- [18] DAI W, MILENKOVIC O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55(5): 2230-2249.
- [19] SONG C B, XIA S T, LIU X J. Subspace Thresholding Pursuit: A Reconstruction Algorithm for Compressed Sensing [C]// *IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*. 2015: 536-540.