

逼近误差有界的相容性高阶网格生成

张文祥, 郭佳鹏, 傅孝明

引用本文

张文祥, 郭佳鹏, 傅孝明. [逼近误差有界的相容性高阶网格生成](#)[J]. 计算机科学, 2024, 51(1): 207-214.

ZHANG Wenxiang, GUO Jiapeng, FU Xiaoming. [Error-bounded Compatible High-order Remeshing](#)[J]. Computer Science, 2024, 51(1): 207-214.

相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

[基于手势几何分布特征的手势识别](#)

Gesture Recognition Based on Hand Geometric Distribution Feature

计算机科学, 2019, 46(6A): 246-249.

[基于超像素匹配的图像协同显著性检测](#)

Co-saliency Detection via Superpixel Matching

计算机科学, 2017, 44(11): 314-319. <https://doi.org/10.11896/j.issn.1002-137X.2017.11.048>

[一种分层的和多分辨的镜头边界检测方法](#)

计算机科学, 2006, 33(6): 225-231.

[基于上下文感知和移动位置预测的切换机制](#)

Handoff Mechanism Based on Context-aware and Mobile Location Prediction

计算机科学, 2014, 41(9): 119-124. <https://doi.org/10.11896/j.issn.1002-137X.2014.09.023>

逼近误差有界的相容性高阶网格生成

张文祥 郭佳鹏 傅孝明

中国科学技术大学数学科学学院 合肥 230000

(zwx111@mail.ustc.edu.cn)

摘要 文中提出了一种构造逼近误差有界的高质量相容性高阶网格的方法。给定两个定向的、拓扑同构的三角形网格和一组稀疏的对应点,此方法包含两个步骤:(1)生成满足误差有界的相容性高阶网格;(2)在确保逼近误差总是有界的前提下,降低网格的几何复杂度,并在该过程中通过优化控制顶点来降低相容性网格之间的扭曲以及与原始网格之间的几何近似误差。第一步先生成满足误差有界的相容性线性网格,然后升阶为高阶网格。第二步通过迭代地执行基于边长的重新网格化和增加相容性目标边长场,有效地降低了网格几何复杂度。从切空间的角度,推导出了3DBézier三角形之间映射的雅可比矩阵,从而可以有效地优化扭曲能量。通过对扭曲能量和几何近似误差能量的优化,有效地降低了相容性网格之间的扭曲以及相容性网格与原始网格之间的几何近似误差。通过大量实验,证明了此方法对于构造误差有界的高质量相容性高阶网格的有效性和实用性。

关键词:相容性网格;高阶网格;近似误差有界;Hausdorff距离;高质量网格;低网格复杂度

中图分类号 TP391

Error-bounded Compatible High-order Remeshing

ZHANG Wenxiang, GUO Jiapeng and FU Xiaoming

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230000, China

Abstract This paper proposes a method to construct high-quality and compatible high-order surface meshes with bounded approximation errors. Given two closed, oriented, and topologically equivalent surfaces and a sparse set of corresponding landmarks, the proposed method contains two steps: (1) generate compatible high-order meshes with bounded approximation errors and (2) reduce mesh complexity while ensuring that approximation errors are always bounded, and reduce the distortion between the compatible meshes and approximation errors with the original meshes by optimizing the control vertices. The first step is to generate compatible linear meshes with bounded approximation errors, and then upgrade them to high-order meshes. In the second step, the mesh complexity is effectively reduced by iteratively performing an edge-based remeshing and increasing the compatible target edge lengths. The Jacobian matrix of the mapping between 3D Bézier triangles is derived from tangent space, so that the distortion energy can be effectively optimized. By optimizing the distortion energy and approximation errors energy, the distortion between compatible meshes and approximation errors are effectively reduced. Tests on various pairs of complex models demonstrate the efficacy and practicability of our method for constructing high-quality compatible high-order meshes with bounded approximation errors.

Keywords Compatible mesh, High-order mesh, Bounded approximation errors, Hausdorff distance, High-quality mesh, Low mesh complexity

1 引言

相容性网格指拥有相同拓扑连接关系的网格。在几何处理和科学计算中,相容性网格有着广泛的应用场景,如信息传递、同步模型编辑等。高阶网格由高阶元素组成,即网格的点、线、面、体都是由多项式来表达。相较于线性网格,高阶网格具有以下两个主要优点:(1)在给定几何近似误差的约束下,有着更低的几何复杂度;(2)在给定几何复杂度的约束下,

有着更高的保真度以及优化自由度,从而能够得到更高的仿真精度。

本文将相容性网格和高阶网格相结合,研究高质量的相容性高阶网格的生成方法。给定两个具有稀疏对应点的3D线性三角网格,希望生成满足以下性质的网格:(1)两个高阶网格具有相同的拓扑连接关系;(2)两个高阶网格相应的三角面片之间存在低扭曲映射;(3)两个高阶网格尽量接近正则网格;(4)每个高阶网格与其相应的输入模型之间的近似误差是

到稿日期:2023-07-17 返修日期:2023-09-18

基金项目:国家自然科学基金(62272429)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(62272429).

通信作者:傅孝明(fuxm@ustc.edu.cn)

有界的;(5)两个高阶网格的几何复杂度尽可能低,即网格面片数尽量可能少。

现有相容性网格化方法生成的是线性网格^[1],而非高阶网格。在高阶网格生成方面,现有的方法都集中于单个 2D 三角形网格^[2]或单个 3D 四面体网格^[3]的生成。生成相容性高阶网格的一种很直观的想法是,利用 Yang 等^[1]的方法生成满足误差有界的相容性线性网格,然后将其升阶为高阶网格,来优化网格质量、映射扭曲和几何近似误差。然而,在优化映射扭曲时存在以下困难:(1)如果直接计算两个高阶网格之间的扭曲能量,会导致推导、计算和优化过程极为复杂,基本不可行;(2)高阶三角形的物理空间和参数空间的维度是不同的,这导致无法直接利用以前高阶网格的优化方法^[4]去求解雅可比矩阵。

本文提出了一种生成满足上述要求的相容性高阶网格的方法。首先利用 Yang 等^[1]的方法生成满足误差有界的相容性高阶网格。为了降低网格的几何复杂度,对得到的相容性高阶网格基于边长进行重新网格化^[5],并在该过程中通过优化控制顶点来降低相容性网格之间的扭曲以及相容性网格与原始网格之间的几何近似误差。为了解决优化映射扭曲时遇到的两个困难,我们提出了如下策略。首先,采用公共区域的策略,通过降低相应高阶三角形到公共区域的映射扭曲来降低高阶三角形之间的映射扭曲;其次,利用切空间的内蕴性,从切空间出发去求解雅可比矩阵,从而定义映射扭曲。

本文的主要贡献如下:

(1)本文方法是第一个将相容性网格和高阶网格结合起来的方法,能够在满足误差有界条件的基础上,生成高质量、低复杂度的相容性高阶网格的方法,如图 1 所示。

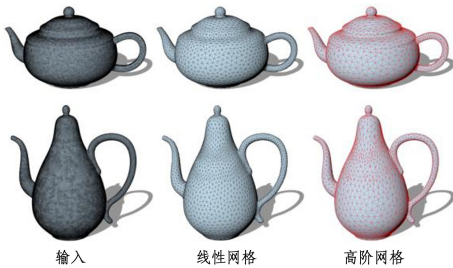


图 1 相容性网格

Fig. 1 Compatible meshes

(2)避免了高阶三角形网格之间的映射扭曲的复杂计算,通过采用公共区域的策略来降低它们之间的映射扭曲,同时利用切空间将高阶网格雅可比矩阵的推导由 2D 三角形网格和 3D 四面体网格推广到了 3D 三角形网格。

大量实验证明,本文方法能够生成几何近似误差有界且具有低网格复杂度以及低扭曲映射的相容性高阶网格。

2 相关工作

2.1 相容性网格生成

许多相容性网格化方法都是基于曲面间的双射^[6]来生成相容性网格。现有的一些方法通过计算输入模型与公共区域(如球面^[7]、简化三角网格^[8]、平面区域^[9]等)的曲面间双射,从而得到相容性网格。这种方法通过两个步骤生成相容性

网格:(1)对公共区域进行重新网格化;(2)将重新网格化后的公共区域通过曲面间的双射反射回输入模型。公共区域的重新网格化方法包括将两个网格进行叠加^[10]或直接进行正则细分^[11]。相容性网格还可以利用曲面间映射直接将一个网格的拓扑连接关系映射到另一个网格上^[12]。为了提高网格质量,可以加入后优化步骤,比如顶点平滑、伪边翻转细分、基于体积增强的扭曲最小化^[13]、基于目标边长的重新网格化^[1]。我们在 Yang 等^[1]的基于目标边长的重新网格化方法的基础上,对高阶网格控制顶点进行了优化,以降低相容性网格之间的扭曲以及与相容性网格原始网格之间的几何近似误差。

2.2 高阶网格生成

高阶网格生成技术的现状可参见文献^[14]。与线性网格相比,相容性网格对建模、渲染和模拟更具吸引力,因为它们需要较少的面片数来表示弯曲的几何形状。目前高阶网格生成的方法主要有两大类:(1)直接方法,显示插值目标曲面的几个点或在曲面边界上投影高阶节点^[15]。(2)基于变形的的方法,将输入的线性网格变形为接近曲面边界的高阶网格,这种方法关注于不同能量函数的设计,包括线性弹性能量^[16]、非线性超弹性能量^[17]、热弹性能量^[18]和最优 Delaunay 三角剖分^[4]。

2.3 高阶几何优化

尽管线性有限元基在图形应用中被广泛使用,但是近年来,高阶基函数由于具有更高的自由度,越来越受到人们的重视。高阶基函数已经被证明有利于动画化可变形体^[19]以及计算嵌入变形的位移^[20]。高阶基函数也被用于无网格方法,以提高精度和加快收敛速度^[21]。工程分析中经常使用高阶基函数^[22],因为其复杂度更低且能更快地减小几何离散化误差^[23]。高阶基函数也被用于增量潜在碰撞框架中,从而能够以更高的效率求解具有复杂几何形状的弹性动力学问题的增量潜在碰撞模型^[24]。

3 算法概述

3.1 问题定义与方法论

3.1.1 输入

输入包括两个定向的、拓扑同构的三角网格 P, Q 和一组稀疏的对应点 $S = \{(p_i, q_i)\} \subset P \times Q$ 。

3.1.2 目标

生成两个新的网格 P_r 和 Q_r , 且要求这两个网格满足下述条件。

(1)高阶网格条件: P_r 和 Q_r 表示由 n 阶 Bézier 三角形构成的 3D 中的 n 阶 Bézier 三角形网格。

(2)相容性条件: P_r 和 Q_r 具有相同的拓扑连接关系。

(3)低扭曲条件: P_r 和 Q_r 相应的 Bézier 三角面片之间存在一个低扭曲映射。

(4)规则性网格条件: P_r 和 Q_r 都是相当规则的网格。

(5)误差有界条件: P_r 和 P, Q_r 和 Q 之间的几何近似误差均是有界的,即 $d_H(P_r, P) \leq \epsilon_p, d_H(Q_r, Q) \leq \epsilon_q$, 其中 $d_H(\cdot, \cdot)$ 是用来度量几何近似误差的双向 Hausdorff 距离, ϵ_p 和 ϵ_q 是用户给定的误差界。

(6)低复杂度条件: P_r^c 和 Q_r^c 包含尽可能少的 Bézier 三角面片个数。

3.1.3 挑战

由于上述条件之间存在相互制约的关系,因此很难生成同时满足上述要求的相容性高阶网格。其中最大的挑战在于,低复杂度往往会导致较差的网格质量、高扭曲映射和高几何近似误差。因此,如何在降低网格复杂度的同时,优化网格质量、映射扭曲和近似误差,从而使生成的相容性网格同时满足低扭曲、规则性网格、误差有界和低复杂度条件成为了亟需解决的问题。

3.1.4 方法论

采用解耦的思想,通过先放松一些条件,求解一个满足其

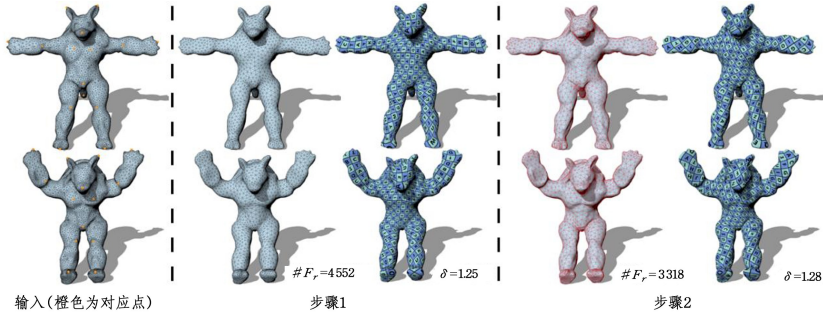


图2 本文算法流程(电子版为彩图)

Fig. 2 Workflow of the proposed algorithm

3.2 初始化相容性高阶网格

为了生成满足误差有界的相容性线性网格, Yang 等^[1]采用了两步法策略。(1)采用公共区域的策略生成初始的相容性线性网格。为了提高 r 所生成网格的映射质量, Yang 等首先优化割缝位置,之后构建目标边长来指导相容性网格的重新网格化过程。通过自适应地调整目标边长,相容性网格被迭代细分,直到满足误差有界的约束。(2)交替进行一种新的基于边长的相容性网格的重新网格化,并通过增加目标边长来降低相容性网格的复杂度,同时确保相容性、规则性和误差有界条件。

为了确保算法简单且有效,直接采用 Yang 等^[1]的方法,生成初始的满足误差有界的相容性线性网格(记为 P_r^l 和 Q_r^l),然后采用升阶的思想来提升网格的阶数,从而将生成的相容性线性网格升阶为相容性高阶网格(记为 P_r^c 和 Q_r^c)。

3.3 优化相容性高阶网格

优化相容性高阶网格的主要目标是在降低网格复杂度的同时,优化网格质量、映射扭曲和几何近似误差,并保证不违反其他条件。然而低复杂度的网格往往可能违反误差有界约束。为了保证不违反误差有界约束,本文采用了和 Yang 等^[1]方法相似的策略。

- (1) 通过增加目标边长来降低网格复杂度。
- (2) 每次迭代过程中,通过采样显示检测是否满足误差有界约束。

3.3.1 交替简化

采用一种与曲率相关的方法,计算每个输入网格的目标边长场^[5](P 的目标边长场记为 F_p , Q 的目标边长场记为 F_q)来指导基于边长的重新网格化。 F_p 在顶点 v_i 的计算式如下:

他条件的新问题,从而得到一个中间结果;然后将中间结果作为输入,在较小的优化空间中寻找能够满足所有条件的最终结果。由于上述条件中的误差有界条件是硬约束,因此在求解过程中一直保持满足误差有界条件,选择放松其他条件。

3.3.1.5 算法流程

根据上述解耦思想,本文方法包括以下两个步骤:

步骤1 放松低扭曲条件、规则性网格条件、低复杂度条件,生成满足误差有界的初始相容性高阶网格。

步骤2 在降低高阶网格的几何复杂度的同时,优化网格质量、映射扭曲和几何近似误差,并保证不违反其他条件。

图2给出了本文算法的主要流程。

$$F_p(v_i) = \sqrt{6 \epsilon_p / \kappa_i - 3 \epsilon_p^2}$$

其中, $\kappa_i = \{|\kappa_i^{\max}|, |\kappa_i^{\min}|\}$, κ_i^{\max} 和 κ_i^{\min} 分别为 v_i 处的最大和最小主曲率。对于三角形上任意一点的目标边长场,可以通过重心坐标插值得到。同理可得到 F_q 。

我们用角度来度量网格的规则性。对于每一个输出的高阶网格,计算由它的拐角控制顶点形成的直边三角形网格的平均最小角(P_r^c 的平均最小角记为 θ_p , Q_r^c 的平均最小角记为 θ_q),平均最小角定义为所有面的最小角的平均。交替简化算法如下:

(1) 对 P_r^c 和 Q_r^c ,计算初始化相容目标边长场 F_r^1 ,并将迭代步数设置为 $k=1$ 。

(2) 在不违反误差有界条件的前提下,执行基于边长的重新网格化技术。

(3) 当 θ_p (θ_q) $< \theta_{\min}$ 或者网格复杂度不再降低时,终止算法;否则,令 $k=k+1$, $F_r^k = \rho \times F_r^{k-1}$,返回第(2)步。

其中, $\theta_{\min} = \min\{45^\circ, \lfloor \theta_p^\circ \rfloor, \lfloor \theta_q^\circ \rfloor\}$, θ_p° 和 θ_q° 分别是输入模型 P 和 Q 的平均最小角; $\rho > 1$ 是一个放大目标边长场的参数,和文献[1]一样, $\rho=1.2$ 。

3.3.2 计算 F_r^1

由于 P_r^l 和 Q_r^l 是简化过的相容性线性网格,因此,它们的目标边长场相对于 F_p 和 F_q 已经放大了 ρ_l 倍,故先将 F_p 和 F_q 放大 ρ_l 倍,即

$$F_p = \rho_l \times F_p, F_q = \rho_l \times F_q$$

对于 P_r^c 和 Q_r^c 上的对应点 x 和 y ,初始化相容目标边长场的计算式如下:

$$F_r^1(x) = F_r^1(y) = \min\{F_p(\Delta_p(x)), F_q(\Delta_q(x))\}$$

其中, $\Delta_p(\cdot)$ 和 $\Delta_q(\cdot)$ 分别表示到 P 和 Q 的最近点投影。

3.3.3 基于边长的重新网格化

本文基于边长的重新网格化算法和 Yang 等^[1]的方法类似,都是由边细分、边折叠、边翻转和顶点重定位 4 种局部操作所构成,如果执行局部操作后不满足误差有界条件,则执行回退操作。然而,本文方法与他们的方法主要有以下两点不同。

(1)边长的计算。给定 P_r^c 和 Q_r^c 上的一对对应边 (e_p, e_q) , $e_p \in P_r^c, e_q \in Q_r^c$ 。由于高阶网格的边为曲边,因此 e_p 和 e_q 的边长 $l(e_p)$ 和 $l(e_q)$ 、相容性目标边长 $F_c^k(e_p)$ 和 $F_c^k(e_q)$ 的计算式如下:

$$\begin{cases} l(e_p) = \int_{e_p} \|\Phi_p'\| dt, l(e_q) = \int_{e_q} \|\Phi_q'\| dt \\ F_c^k(e_p) = F_c^k(e_q) = \min\left(\int_{e_p} L_p(x) dx, \int_{e_q} L_q(x) dx\right) \end{cases}$$

其中, Φ_p 和 Φ_q 分别为 P_r^c 和 Q_r^c 的 Bézier 表达式, L_p 和 L_q 分别为根据最近点投影求得的 P_r^c 和 Q_r^c 上点的目标边长。

(2)顶点的优化。除了边细分的局部操作外,本文方法在每次执行完局部操作后,都要根据能量局部优化高阶网格的控制顶点的位置,从而优化网格质量、映射扭曲和几何近似误差。

3.4 网格的几何优化

假设要优化的 P_r^c 上的 Bézier 三角面片的集合为 B_p , 对应的 Q_r^c 上的 Bézier 三角面片的集合为 B_q , 优化目标是提升网格规则性、降低映射扭曲和几何近似误差。为了降低映射扭曲,我们采用公共区域的策略,即降低对应 Bézier 三角面片到同一公共区域的映射扭曲,进而降低对应 Bézier 三角面片之间的映射扭曲。以单个 Bézier 三角面片为例,设 T_p 和 T_q 分别为 P_r^c 和 Q_r^c 上对应的 Bézier 三角面片。通过以下复合能量优化 Bézier 三角面片的控制顶点的位置:

$$\begin{cases} \min E(T_p) = E_{\text{iso}}(T_p) + \lambda E_{\text{error}}(T_p) \\ \min E(T_q) = E_{\text{iso}}(T_q) + \lambda E_{\text{error}}(T_q) \end{cases}$$

其中, E_{iso} 是 T_p (T_q) 到公共区域的映射扭曲能量, E_{error} 是 T_p (T_q) 到 P (Q) 的几何近似误差。为了提升网格规则性,选择正三角形作为公共区域。

3.4.1 扭曲能量

重心坐标允许用顶点的值来表示单纯形内部的值。对于三角形内部的点 \bar{x} , 重心坐标 $\mathbf{u}(\bar{x}) = (u_0, u_1, u_2)$ 满足 $u_j \geq 0, \sum u_j = 1; n$ 阶重心指数 $i = (i_0, i_1, i_2)$ 指满足 $i_j \geq 0$ 和 $|\mathbf{i}| = \sum i_j = n$ 的非负整数向量。每个这样的指数均对应于一个 Bernstein 多项式, 定义如下:

$$B_i^n(\mathbf{u}) = \frac{n!}{i_0! i_1! i_2!} u_0^{i_0} u_1^{i_1} u_2^{i_2}$$

对于参数三角形(本文选取的是正三角形)内的任意一点 \bar{x} , 物理空间中的 n 阶 Bézier 三角形通过如下公式定义。

$$\mathbf{x} = \phi(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{c}_i B_i^n(\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}))$$

其中, $\mathbf{C} = \{\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{i} \in \mathbb{N}^3, |\mathbf{i}| = n\}$ 为给定的一组控制顶点。

为了计算参数三角形到 Bézier 三角形的映射扭曲,需要计算映射的雅可比矩阵。以往的方法^[4]都是 $\phi(\bar{\mathbf{x}})$ 直接对 $\bar{\mathbf{x}}$ 求导,即 $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}}) = \nabla \phi(\bar{\mathbf{x}})$, 这是因为在它们的求解问题中,参数空间与物理空间的维度是相同的。然而,这对于 3D 的 Bézier

三角形网格却不适用,虽然参数空间和物理空间的维度看似都是 3 维,但参数空间的实际维度却是 2 维,原因是 $u_0 + u_1 + u_2 = 1 \Rightarrow u_2 = 1 - u_0 - u_1$ 。

为了计算映射的雅可比矩阵,我们从切空间的角度出发。参数三角形内任意一点 $\bar{\mathbf{x}}$ 都可以表示为:

$$\bar{\mathbf{x}}(u_0, u_1) = u_0 \mathbf{v}_0 + u_1 \mathbf{v}_1 + (1 - u_0 - u_1) \mathbf{v}_2$$

其中, $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ 。因此,有

$$d\mathbf{x} = (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) (du_0 \quad du_1)^T$$

对于 n 阶 Bézier 三角形

$$\phi(u_0, u_1) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{c}_i \frac{n!}{i_0! i_1! i_2!} u_0^{i_0} u_1^{i_1} (1 - u_0 - u_1)^{i_2}$$

有

$$d\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_0} \quad \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) (du_0 \quad du_1)^T$$

其中

$$\frac{\partial \phi}{\partial u_k} = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{c}_i \frac{\partial B_i^n(\mathbf{u})}{\partial u_k} = \sum_{|\mathbf{i}|=n} n \mathbf{c}_i (B_{i-[k]}^{n-1}(\mathbf{u}) - B_{i-[2]}^{n-1}(\mathbf{u}))$$

其中, $[k]$ 表示重心指数的第 k 个元素为 1, 其余为 0 (例如, $[0] = [1, 0, 0]$)。

因此, n 阶 Bézier 三角形在重心坐标 \mathbf{u} 处的切平面的向量基为 $\left. \frac{\partial \phi}{\partial u_0} \right|_{\text{local}}$ 和 $\left. \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right|_{\text{local}}$ 。 $\left. \frac{\partial \phi}{\partial u_0} \right|_{\text{local}}$ 和 $\left. \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right|_{\text{local}}$ 为 $\frac{\partial \phi}{\partial u_0}$ 和 $\frac{\partial \phi}{\partial u_1}$ 的局部坐标。由于参数三角形的切平面对应的向量基恒为 $\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_2$ 和 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, 因此,映射在重心坐标 \mathbf{u} 处的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial \phi}{\partial u_0} \right|_{\text{local}} & \left. \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right|_{\text{local}} \end{pmatrix} (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^{-1}$$

本文采用对称 Dirichlet 能量作为扭曲能量,即

$$E_{\text{iso}}(T) = \int_T \|\mathbf{J}(\mathbf{x})\|_F^2 + \|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x})\|_F^2 dx$$

3.4.2 几何近似误差能量

通过在 T_p (T_q) 上采样来度量 T_p (T_q) 到输入网格 P (Q) 的几何近似误差,因此几何近似误差能量可由以下公式表示:

$$E_{\text{error}}(T_p) = \frac{1}{|S_p|} \sum_{\mathbf{x}_p \in S_p} \|\mathbf{x}_p - \Lambda_p(\mathbf{x}_p)\|^2$$

$$E_{\text{error}}(T_q) = \frac{1}{|S_q|} \sum_{\mathbf{x}_q \in S_q} \|\mathbf{x}_q - \Lambda_q(\mathbf{x}_q)\|^2$$

其中, S_p (S_q) 为在 T_p (T_q) 上的采样点, $|S_p|$ ($|S_q|$) 为采样点数目。

3.4.3 能量优化

由于扭曲能量是 Bézier 映射的雅可比矩阵的函数的积分,我们无法得到它的解析形式,因此,只能通过数值积分的方法^[25]去求解,即

$$E_{\text{iso}}(T) = \sum_j \omega_j E_{\text{iso}}(\mathbf{x}_j)$$

其中, $E_{\text{iso}}(\mathbf{x}_j) = \|\mathbf{J}(\mathbf{x}_j)\|_F^2 + \|\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_j)\|_F^2$, \mathbf{x}_j 为积分采样点, ω_j 为相应的权重。

在数值优化算法^[26]中,梯度下降法和线搜索是比较常用且理论完善的算法。为了确保算法简单且有效,本文采用梯度下降法和线搜索来优化 Bézier 三角网格控制顶点的位置。

以 $E(T_p)$ 为例计算梯度。

$$\frac{\partial E(T_p)}{\partial \mathbf{c}_i} = \frac{\partial E_{\text{iso}}(T_p)}{\partial \mathbf{c}_i} + \lambda \frac{\partial E_{\text{error}}(T_p)}{\partial \mathbf{c}_i}$$

由于 Bézier 映射关于控制顶点是线性的, $E_{\text{error}}(T_p)$ 是

简单的二次项能量,因此易到

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{\text{error}}(T_p)}{\partial c_i} &= \frac{2}{|S_p|} \sum_{x_p \in S_p} \| \mathbf{x}_p - \Lambda_p(\mathbf{x}_p) \| \frac{x_p}{\partial c_i} \\ &= \frac{2}{|S_p|} \sum_{x_p \in S_p} \| \mathbf{x}_p - \Lambda_p(\mathbf{x}_p) \| B_i^T(\mathbf{u}_p) \end{aligned}$$

其中, \mathbf{u}_p 为 x_p 对应的重心坐标。

通过各向同性扭曲能量的解析特征系统^[27],可以很方便地解析求解出 $\frac{\partial E_{\text{iso}}(T_p)}{\partial c_i}$ 。当想要利用解析特征系统求解

$\frac{\partial^2 E_{\text{iso}}(T_p)}{\partial^2 c_i}$ 时,我们发现 $\left. \frac{\partial \phi}{\partial u_0} \right|_{\text{local}}$ 和 $\left. \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right|_{\text{local}}$ 关于控制顶点是非线性的,这导致解析特征系统不再可用,从而导致 $\frac{\partial^2 E_{\text{iso}}(T_p)}{\partial^2 c_i}$

的求解异常繁琐,这也是本文不使用解析特征系统所提供的二阶优化方法,而使用简单的梯度下降法的原因。

4 实验

我们在各种模型上测试了本文的逼近误差有界的高质量相容性高阶网格化算法,以评估其性能。本文算法是用 C++ 实现的,所有的实验都是在一台配备 3.0 GHz Intel Core i7-9700 CPU 和 16GB 内存的台式机上执行的。

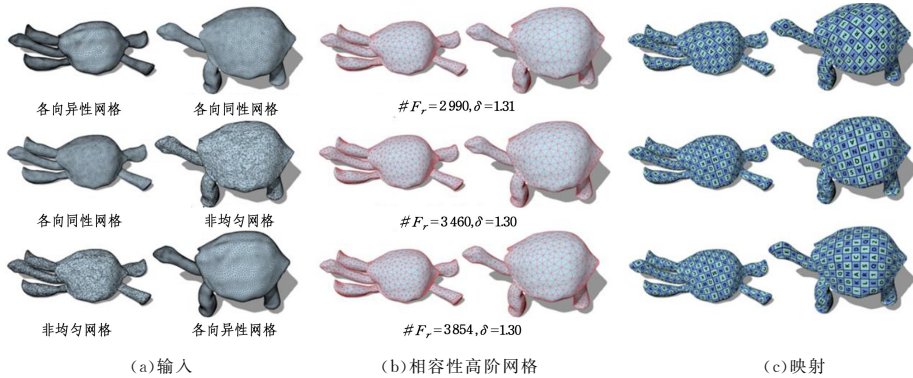


图3 不同三角化

Fig. 3 Different triangulation

4.2.2 不同的逼近误差界

双向 Hausdorff 距离误差界可以表示为 $\epsilon_p = \delta_H d_{bb}^p$ ($\epsilon_q = \delta_H d_{bb}^q$), d_{bb}^p 和 d_{bb}^q 分别为输入三角网格 P 和 Q 的对角线长度。图 4 给出了 3 种不同的逼近误差界 δ_H 所对应的

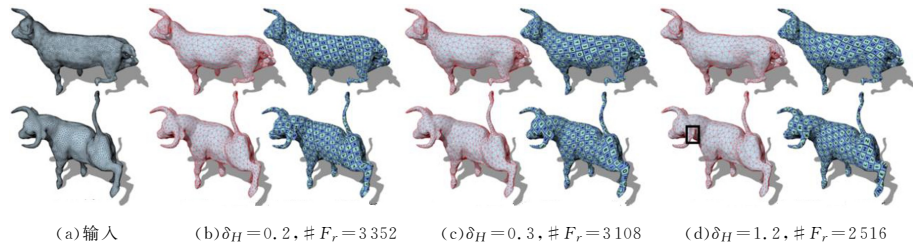


图4 不同的逼近误差界

Fig. 4 Different approximation errors

4.2.3 不同的 Bézier 阶数

图 5 给出了利用本文方法生成的不同 Bézier 阶数的高阶网格。实验发现,在相同的逼近误差有界的前提下,随着网格阶数的增大,得到的相容性高阶网格的复杂度和

4.1 质量度量标准

我们用最终相容性高阶网格的三角面片数(表示为 F_r)来表示网格的复杂度。 P_r^c 和 P (或 Q_r^c 和 Q) 之间的 Hausdorff 距离 $d_H(P_r^c, P)$ (或 $d_H(Q_r^c, Q)$) 是用线性网格近似 P_r^c (或 Q_r^c) 后,用 Metro^[28] 测量的。 P_r^c (或 Q_r^c) 的网格规则性则用它的拐角控制顶点形成的直边三角形网格的平均最小角 θ_p (或 θ_q) 来衡量。为了衡量最终的相容性高阶网格之间映射的质量,我们使用了 Fu 等^[29] 提出的等距扭曲的度量。对于一组对应的三角形 f_p 和 f_q 之间的映射的等距扭曲定义为 $\delta_f = \max\{\sigma_{\max}, 1/\sigma_{\min}\}$, 其中 σ_{\max} 和 σ_{\min} 分别为雅可比矩阵的最大和最小奇异值。将所有三角形上等距扭曲的平均值记为 δ 。

表 1 列出了本文所展示模型的质量度和所用时间,其中 F_p , $\#F_q$ 分别表示 P, Q 的面片数, $\#S$ 表示给定的对应点的数目, $\theta_{\text{ave}}^{\min} = \min\{\theta_p, \theta_q\}$ 。

4.2 方法评估

4.2.1 同一输入模型的不同三角化

在图 3 中,将同一模型的 3 种不同三角化作为输入,最终生成的相容性高阶网格有着相似的复杂度和扭曲,这证明了本文算法对不规则输入的鲁棒性。

最终结果。随着 δ_H 的逐渐增大,得到的相容性高阶网格的几何复杂度逐渐降低,但对输入模型的逼近程度逐渐变差。除此之外,一些模型的几何特征可能会由于 δ_H 过大而出现逼近质量很差的问题。在实验中,默认 $\delta_H = 0.3\%$ 。

映射扭曲会有所降低,但时间成本却会大幅增加(见表 1),原因是网格控制顶点的数目和阶数的平方线性相关,进而导致计算和优化时间大幅提升。在实验中,默认 Bézier 阶数 $n = 3$ 。

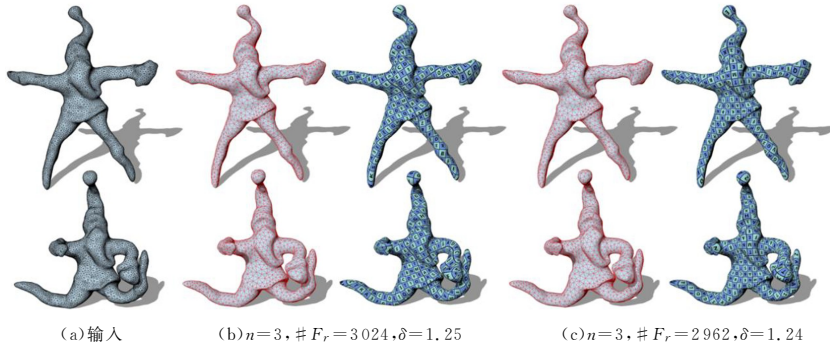


图5 不同的 Bézier 阶数

Fig. 5 Different Bézier orders

表1 实验数据

Table 1 Experimental data

模型	$\#F_p/\#F_q/\#S$	$\#F_r$	δ	$\theta_{ave}^{min}/(^{\circ})$	时间/s	$d_H^p/d_H^q/\%$
图 1	94 336/126 646/15	3 988	1.67	42.09	864.27	0.26/0.21
图 2	18 868/18 954/17	3 318	1.28	45.85	582.03	0.28/0.24
图 3(第一行)	45 908/23 192/11	2 990	1.31	42.86	530.29	0.27/0.28
图 3(第二行)	23 348/25 992/11	3 460	1.30	44.21	620.02	0.29/0.27
图 3(第三行)	25 996/46 888/11	3 854	1.30	42.84	653.52	0.26/0.28
图 4(b)	24 540/19 994/19	3 552	1.41	43.04	645.96	0.19/0.19
图 4(c)	24 540/19 994/19	3 108	1.41	43.89	605.93	0.27/0.28
图 4(d)	24 540/19 994/19	2 516	1.42	43.92	499.37	1.09/1.09
图 5(b)	18 994/18 992/16	3 024	1.25	46.64	592.95	0.23/0.21
图 5(c)	18 994/18 992/16	2 962	1.24	46.04	1801.14	0.18/0.21
图 6	31 488/25 598/16	5 598	4.22	38.07	1084.99	0.29/0.27
图 7 猫头鹰-兔子	25 504/11 810/6	2 982	1.81	41.95	537.28	0.27/0.28
图 7 史莱克-上校	33 272/32 498/10	3 828	1.89	41.29	1457.41	0.29/0.24
图 7 狐狸-猎豹	28 124/24 490/19	2 596	1.37	45.28	487.81	0.24/0.27
图 8 蚂蚁	51 684/18 996/24	2 998	1.19	48.16	549.23	0.21/0.22
图 8 鸟	36 336/18 992/12	3 006	1.16	43.06	550.01	0.27/0.23
图 8 马	18 982/18 996/16	2 844	1.22	46.43	515.95	0.30/0.26
图 8 狗	18 884/18 866/15	2 900	1.36	45.33	524.97	0.27/0.27
图 9 海豚	39 682/15 142/9	2 572	1.15	46.50	736.79	0.22/0.22
图 9 青蛙	24 386/24 638/27	2 468	1.19	45.58	440.59	0.30/0.27

4.2.4 高度差异性模型

为了验证方法的鲁棒性,我们在图 6 中测试了两个高度差异性模型。由于两个输入模型之间存在较大的差异,因此,最终的相容性高阶网格之间的映射存在较大的扭曲。尽管如此,本文方法仍能生成低复杂度的、相当规则的误差有界的相容性高阶网格。



图6 高度差异性模型

Fig. 6 High difference models

4.2.5 数据集

我们在 Yang 等^[1]提供的由 108 对模型组成的数据集

(包括同类模型对和非同类模型对)上对本文方法进行测试。

实验证明,本文方法都能成功地生成误差有界的高质量相容性高阶网格。图 7 给出了数据集中的 3 对非同类模型的结果,图 8 给出了数据集中的 4 对同类模型的结果。



图7 部分非同类模型的结果

Fig. 7 Results of some different models

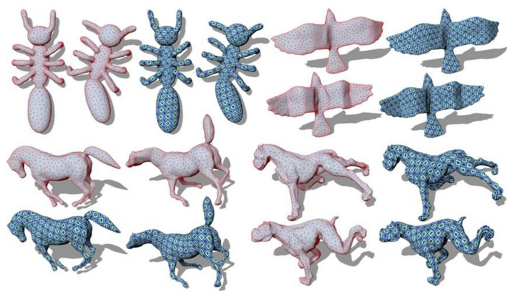


图 8 部分同类模型的结果

Fig. 8 Results of some similar models

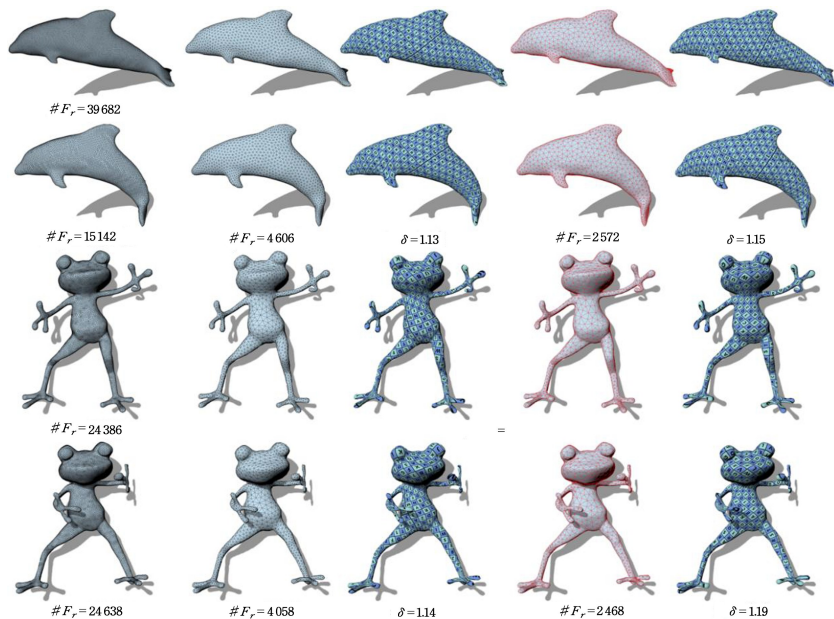


图 9 与 Yang 等^[1]方法的比较

Fig. 9 Comparison with Yang et al.'s^[1] method

4.2.6 时间

以图 2 中的模型为例,在不考虑 Yang 等^[1]的算法所占时间的情况下,本文算法用时为 582.03s,其中控制顶点的优化占比大约为 53.65%。

4.2.7 与 Yang 等^[1]方法的比较

图 9 给出了本文算法与 Yang 等^[1]算法的比较。可以发现,在相同误差界下,本文算法和 Yang 等^[1]的算法有着相似的扭曲,但是本文算法的复杂度更低。这是因为高阶网格具有更高的自由度,并且本文算法在每次执行完局部操作后都会根据能量优化控制顶点的位置。

结束语 本文提出了构造逼近误差有界的高质量相容性高阶网格的方法,该方法包含两个步骤:(1)生成满足误差有界的相容性高阶网格;(2)在确保逼近误差总是有界的前提下,降低网格的几何复杂度,并在该过程中通过优化控制顶点来降低相容性网格之间的扭曲以及与原始网格之间的几何近似误差。这样不仅可以在误差有界的前提下生成具有低复杂度的较为规则的相容性高阶网格,而且还能保证相容性网格之间具有较低扭曲的映射。我们在一个由 108 对模型组成的数据集(包括同类模型对和非同类模型对)上对本文方法进行了测试,验证了其可行性。

首先,在实验中,生成的最终高阶网格表面局部会出现凹凸变化比较明显的情况,我们猜测这是由于在优化控制顶点时没有加入光滑性约束。未来,可以考虑在本文算法对控制顶点位置的优化中加入G¹约束,甚至C¹约束,使得生成的高阶网格更加光滑。但是约束的增加会导致优化空间缩小,因此在光滑性、逼近程度、扭曲大小中找到一个平衡点是未来工作的重点。其次,Hausdorff 距离的显式计算以及控制顶点位置的优化,导致了本文算法的计算成本过高。因此,对 Hausdorff 距离计算和能量优化的加速也是未来的工作方向。

参考文献

[1] YANG Y,ZHANG W X,LIU Y,et al. Error-bounded compatible remeshing[J]. ACM Transactionson Graphics(TOG),2020,39(4):113:1-113:15.

[2] YANG J,LIU S,CHAI S,et al. Precise High-order Meshing of 2D Domains with Rational Bézier Curves[J]. Computer Graphics Forum: Journal of the European Association for Computer Graphics,2022,41(5):79-88.

[3] LIU Z Y,SU J P,LIU H,et al. Error-bounded edge-based remeshing of high-order tetrahedral meshes[J]. Computer-Aided Design,2021,139:103080.

[4] FENG L,ALLIEZ P,BUSÉ L,et al. Curved optimal delaunay triangulation[J]. ACM Transactions on Graphics,2018,37(4):1-16.

[5] DUNYACH M,VANDERHAEGHE D,BARTHE L,et al. Adaptive remeshing for real-time mesh deformation[C]// Eurographics 2013. The Eurographics Association,2013.

[6] LI X,IYENGAR S S. On computing mapping of 3d objects; A survey[J]. ACM Computing Surveys (CSUR),2014,47(2):1-45.

- [7] HU X, FU X M, LIU L. Advanced hierarchical spherical parameterizations[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2017, 24(6):1930-1941.
- [8] KWOK T H, ZHANG Y, WANG C C L. Efficient optimization of common base domains for cross parameterization[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2011, 18(10):1678-1692.
- [9] AIGERMAN N, LIPMAN Y. Hyperbolic orbifold tutte embeddings[J]. ACM Transactions on Graphics(TOG), 2016, 35(6):217:1-217:14.
- [10] SCHMIDT P, BORN J, CAMPEN M, et al. Distortion-minimizing injective maps between surfaces[J]. ACM Transactions on Graphics(TOG), 2019, 38(6):1-15.
- [11] PRAUN E, SWELDENS W, SCHRÖDER P. Consistent mesh parameterizations[C]//Proceedings of the 28th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. 2001:179-184.
- [12] EZUZ D, SOLOMON J, BEN-CHEN M. Reversible harmonic maps between discrete surfaces [J]. ACM Transactions on Graphics(TOG), 2019, 38(2):1-12.
- [13] YANG Y, FU X M, CHAI S, et al. Volume-enhanced compatible remeshing of 3D models[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2018, 25(10):2999-3010.
- [14] SCHNEIDER T, PANOZZO D, ZHOU X. Isogeometric high order mesh generation [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021, 386:114104.
- [15] MANDAD M, CAMPEN M. Bézier guarding: precise higher-order meshing of curved 2D domains[J]. ACM Transactions on Graphics(TOG), 2020, 39(4):103:1-103:15.
- [16] XIE Z Q, SEVILLA R, HASSAN O, et al. The generation of arbitrary order curved meshes for 3D finite element analysis[J]. Computational Mechanics, 2013, 51:361-374.
- [17] PERSSON P O, PERAIRE J. Curved mesh generation and mesh refinement using Lagrangian solid mechanics[C]//47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. 2009.
- [18] MOXEY D, EKELSCHOT D, KESKIN Ü, et al. High-order curvilinear meshing using a thermo-elastic analogy[J]. Computer-Aided Design, 2016, 72:130-139.
- [19] BARGTEIL A W, COHEN E. Animation of deformable bodies with quadratic Bézier finite elements[J]. ACM Transactions on Graphics(TOG), 2014, 33(3):1-10.
- [20] MEZGER J, THOMASZEWSKI B, PABST S, et al. Interactive physically-based shape editing [C]//Proceedings of the 2008 ACM symposium on Solid and physical modeling. 2008:79-89.
- [21] FAURE F, GILLES B, BOUSQUET G, et al. Sparse meshless models of complex deformable solids[J]. ACM Transactions on Graphics(TOG), 2011, 30(4):1-10.
- [22] JAMESON A, ALONSO J, MCMULLEN M. Application of a non-linear frequency domain solver to the Euler and Navier-Stokes equations[C]//40th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit. 2002.
- [23] LUO X, SHEPHARD M S, REMACLE J F. The influence of geometric approximation on the accuracy of high order methods [R]. Rensselaer SCOREC Report, 2001.
- [24] FERGUSON Z, JAIN P, ZORIN D, et al. High-Order Incremental Potential Contact for Elastodynamic Simulation on Curved Meshes[J]. arXiv:2205.13727, 2022.
- [25] WITHERDEN F D, VINCENT P E. On the identification of symmetric quadrature rules for finite element methods[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2015, 69(10):1232-1241.
- [26] JORGE N, STEPHEN J W. Numerical optimization[M]. Springer, 2006.
- [27] SMITH B, GOES F D, KIM T. Analytic eigensystems for isotropic distortion energies[J]. ACM Transactions on Graphics(TOG), 2019, 38(1):1-15.
- [28] CIGNONI P, ROCCHINI C, SCOPIGNO R. Metro: measuring error on simplified surfaces [J]. Computer Graphics Forum, 1998, 17(2):167-174.
- [29] FU X M, LIU Y, GUO B. Computing locally injective mappings by advanced MIPS[J]. ACM Transactions on Graphics(TOG), 2015, 34(4):1-12.



ZHANG Wenxiang, born in 1997, post-graduate. His main research interests include geometric processing and computer graphics.



FU Xiaoming, born in 1988, Ph.D, associate professor. His main research interests include geometric processing and computer-aided geometric design.

(责任编辑:杨雪敏)